Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Физико-математический факультет

Кафедра прикладной математики и информатики

Квалификационная работа

«Допущено к защите»

зав. каф. пр. математики и информатики,

доцент \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А. В. Коровай

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА СЕТЯХ

Выполнила:

студентка 410 гр. д/о

физ.-мат. факультета

Стрелец Кристины

Руководитель:

доцент кафедры ПМ и И

Леонова Наталья Григорьевна

Тирасполь, 2016

Оглавление

[Аннотация 3](#_Toc446590168)

[Введение 4](#_Toc446590169)

[1. Модели сетевого планирования и управления 8](#_Toc446590170)

[1.1. Общие сведения о сетях и сетевой модели 8](#_Toc446590171)

[1.2. Построение сетевых графиков 13](#_Toc446590172)

[1.3. Временные параметры сетевой модели 19](#_Toc446590173)

[1.4. Выводы по главе 23](#_Toc446590174)

[2. Оптимизация сетевых моделей 25](#_Toc446590175)

[2.1. Анализ и оптимизация сетевых моделей 25](#_Toc446590176)

[2.2. Методика оптимизации сетевых моделей по критерию «время-затраты» 30](#_Toc446590177)

[2.2.1. Оптимизация комплекса операций по времени 30](#_Toc446590178)

[2.2.2. Оптимизация комплекса операций по общей стоимости работ при фиксированном сроке выполнения проекта 34](#_Toc446590179)

[2.3. Сетевое планирование в условиях неопределённости 39](#_Toc446590180)

[2.4. Выводы по главе 45](#_Toc446590181)

[3. Расчёт и оптимизация сетевой модели планирования поставок товаров оптовым покупателям 47](#_Toc446590182)

[3.1. Постановка задачи 47](#_Toc446590183)

[3.2. Построение сетевого графика и расчёт временных параметров сетевой модели планирования поставки товаров оптовым покупателям 49](#_Toc446590184)

[3.3. Расчёт коэффициентов напряжённости сетевого графика 54](#_Toc446590185)

[3.4. Оптимизация сетевой модели по критерию «время-затраты» 57](#_Toc446590186)

[3.5. Расчёт вероятностных характеристик сетевой модели 65](#_Toc446590187)

[3.6. Вывод по главе 67](#_Toc446590188)

[Заключение 68](#_Toc446590189)

[Литература 70](#_Toc446590190)

Аннотация

Поиски более эффективных способов планирования и управления комплексом работ привели к созданию принципиально новых методов сетевого планирования и управления (СПУ), которое основано на моделировании процессов с помощью сетевого графика и представляет собой совокупность мероприятий по планированию и управлению комплексом работ.

В квалификационной работе рассмотрены теоретические аспекты сетевых моделей и методов их **оптимизации. Оптимизация** сетевого графика представляет процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. Она проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, сокращения общей стоимости работ, рационального использования ресурсов и др.

В работе представлена методика оптимизации сетевых моделей по критерию «время-затраты», которая была апробирована при проведении расчётов временных и стоимостных параметров и оптимизации сетевой модели планирования поставок куриной продукции оптовым покупателям на примере торговой фирмы г. Бендеры.

Структура работы представлена введением, тремя главами, заключением и литературой.

Квалификационная работа представляет интерес в прикладном и методическом отношении, так как может быть использована при решении ряда оптимизационных экономических задач.

Введение

В различных сферах производственной, научной и общественной деятельности, часто встречаются задачи рационального планирования комплекса работ. Сетевое планирование и управление – это комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий, обеспечивающих моделирование, анализ и динамическую перестройку плана выполнения проектов и разработок в сфере производственной и предпринимательской деятельности.

Задачи сетевого планирования и управления (СПУ) рассматривают соотношения между сроками окончания комплекса операций (работ) и моментами начала всех операций. Эти задачи состоят в нахождении минимальных продолжительностей комплекса операций, оптимального соотношения величин стоимости и сроков их выполнения.

Сетевое планирование – метод управления, основанный на использовании математического аппарата теории графов и системного подхода для отображения и алгоритмизации комплексов взаимосвязанных работ, действий или мероприятий для достижения четко поставленной цели. Основная цель сетевого планирования – сокращение до минимума продолжительности проекта.

Метод сетевого планирования и управления (СПУ) получил всеобщее признание и широкое распространение в тех областях деятельности, которые непосредственно связаны с планированием, организацией и контролем сложных комплексов работ, выполняемых в сжатые сроки. Данный метод является эффективным средством в планировании и управлении, отличаясь вместе с тем простотой и доступностью.

Задача сетевого планирования состоит в том, чтобы графически, наглядно и системно отобразить и оптимизировать последовательность и взаимозависимость работ, действий или мероприятий, обеспечивающих своевременное и планомерное достижение конечных целей. Для отображения и алгоритмизации тех или иных действий или ситуаций используются экономико-математические модели, которые принято называть сетевыми моделями, простейшие из них - сетевые графики, с помощью которых появляется возможность системно и масштабно представлять весь ход работ или оперативных мероприятий, управлять процессом их осуществления, а также маневрировать ресурсами.

Анализ сетевой модели, представленной в графической форме, позволяет, во-первых, более четко выявить взаимосвязи этапов реализации проекта и, во-вторых, определить наиболее оптимальный порядок выполнения этих этапов в целях, например, сокращения сроков выполнения всего комплекса работ.

Оптимизация сетевого графика представляет собой процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. Она проводится с целью сокращения длины критического пути, рационального использования ресурсов.

Оптимизация сетевого графика может осуществляться по следующим двум критериям:

1. минимизация времени выполнения комплекса работ при заданных затратах на это выполнение;
2. минимизация затрат на выполнение комплекса работ при заданном времени этого выполнения.

Актуальность выбранной темы обусловлена постоянной работой внутри функционирующей экономической системы по ее совершенствованию, для чего необходимо планировать комплекс работ, рассматривая их во взаимосвязи, а так же оптимизировать процесс планирования и управления сложными разветвленными комплексами работ, требующими участия большого числа исполнителей и затрат ограниченных ресурсов.

Предмет исследования: основные принципы и методы оптимизации сетевых моделей. Объект исследования: сетевые модели.

Цельюработы является приобретение навыка оптимизации сетевой модели на примере планирования поставки товаров оптовым покупателям.

Для достижения поставленной цели следует решить следующие *задачи*:

- показать сущность и назначение СПУ,

- дать определение основным элементам сетевой модели,

- указать правила построения и упорядочения сетевых графиков,

- описать временные параметры сетевой модели,

- рассмотреть методики оптимизации сетевых моделей по различным критерия

- провести оптимизацию сетевой модели планирования поставки товаров оптовым покупателям.

Первая глава квалификационной работы раскрывает теоретические аспекты основ сетевого планирования и управления. В ней приводятся общие сведения о сетях и сетевых моделях, правила построения сетевых графиков и показан способ вычисления временных параметров сетового графика.

Во второй главе рассмотрены вопросы, связанные с анализом и оптимизацией сетевых моделей, показана методика оптимизации сетевых графиков по критерию «время-затраты» и описано сетевое планирование в условиях неопределённости.

Третья глава посвящена расчёту и оптимизации сетевой модели планирования поставок товаров оптовым покупателям одной из фирм г.Бендеры. Первоначально был построен сетевой график, для которого расчитаны временные параметры и коэффициенты напряжённости. В результате анализа исходная сетевая модель оказалась не лучшей по срокам выполнения работ и использования ресурсов, поэтому подверглась оптимизации, которая позволила провести максимальное сокращение времени выполнения проекта.

Применение методов сетевого планирования и управления в сравнении с традиционно сложившимися методами планирования и оптимизации различных проектов имеет ряд преимуществ:

• повышение качества планирования и управления при реализации комплекса работ;

• наглядность представления комплекса последовательно выполняемых и взаимосвязанных работ;

• возможность выявления наиболее важных задач и работ, определять сроки их реализации;

• возможность выявления резервов времени, ресурсов и их оптимальное использование в целях выполнения комплекса работ в более сжатые сроки, чем это определено директивными показателями;

• возможность четко координировать деятельность всех сторон, участвующих в реализации планируемого комплекса работ;

• четкое распределение ответственности и организация взаимодействия между исполнителями работ [16].

Преимущества моделей сетевого планирования и управления обеспечивают своевременное внесение корректив в процесс управления и в работу различных управленческих органов, эффективное предвидение будущего и надлежащего воздействия на ход выполнения работ.

# Модели сетевого планирования и управления

## Общие сведения о сетях и сетевой модели

Сетевое планирование и управление (СПУ) основано на моделировании процесса с помощью сетевого графика и представляет собой совокупность расчетных методов, организационных и контрольных мероприятий по планированию и управлению комплексом работ.

Под комплексом работ (комплексом операций, или проектом) в рамках теории методов сетевого планирования и управления понимается всякая задача, для выполнения которой необходимо осуществить достаточно большое количество разнообразных работ.

Сетевое планирование и управление состоит из трех основных этапов .

1. Структурное планирование.

2. Календарное планирование.

3. Оперативное управление.

Структурное планированиеначинается с разбиения проекта на определенные операции, для которых определяется продолжительность. Затем строится сетевой график, который представляет взаимосвязи работ. Это позволяет детально анализировать все работы и вносить улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

Календарное планированиепредусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой работы и другие временные характеристики сетевого графика. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех работ с целью проведения оптимизации сетевой модели, которая улучшает эффективность использования какого-либо ресурса.

В ходе оперативного управленияиспользуются сетевой и календарный графики для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части проекта [2].

Система СПУ позволяет:

– формировать календарный план реализации некоторого комплекса работ;

– выявлять и мобилизовывать резервы времени, трудовые, материальные и денежные ресурсы;

– осуществлять управление комплексом работ по принципу «ведущего звена» с прогнозированием и предупреждением возможных срывов в ходе работ;

– повышать эффективность управления в целом при четком распределении ответственности между руководителями разных уровней и исполнителями работ.

Для составления плана по реализации комплекса работ необходимо составить его математическую модель, в качестве которой в данном случае выступает сетевая модель.

Сетевой моделью (СМ) называется экономико-математическая модель, отражающая весь комплекс работ и событий, связанных с реализацией проекта в их логической и технологической последовательности и связи.

Основой СПУ является сетевой график. Сетевой график (сетевая модель, сеть) – это схематическое изображение планируемого процесса (проекта, разработки) в виде ориентированного графа, которое отражает технологическую взаимосвязь и последовательность входящих в него работ. С помощью сетевого графика можно представить в наглядной форме ход выполнения некоторого комплекса работ, а также управлять ходом работ.

С математической точки зрения сетевой график представляет собой конечную ориентированную сеть без контуров. Анализ сетевой модели, представленной в графической или табличной (матричной) форме, позволяет: во-первых, более четко выявить взаимосвязи этапов реализации проекта;  
во-вторых, определить наиболее оптимальный порядок выполнения этих этапов в целях, например, сокращения сроков выполнения всего комплекса работ.

Математический аппарат сетевых моделей базируется на теории графов [4, 5, 14, 23].

Графом называется совокупность двух конечных множеств: множества точек, которые называются вершинами, и множества связей, соединяющих вершины, которые называются ребрами. Если рассматриваемые пары вершин являются упорядоченными, т.е. на каждом ребре задается направление, то граф называется ориентированным; в противном случае –  неориентированным. Последовательность неповторяющихся ребер, ведущая от некоторой вершины к другой, образует путь.

Граф называется связным, если для любых двух его вершин существует путь, соединяющий их; в противном случае граф называется несвязным.   
В экономике чаще всего используются два вида графов: дерево и сеть.

Дерево представляет собой связный граф без циклов, имеющий исходную вершину (корень) и крайние вершины; пути от исходной вершины к крайним вершинам называются ветвями.

Деятельность современного общества тесно связана с разного рода сетями – транспортными, связи, ирригационными, водопроводными и т.д. Поэтому во многих практических задачах вместо понятия ”граф” часто используется понятие ”сеть”. Это обычно относится к случаям, когда кроме основных, структурных соотношений в графе задаются некоторые количественные характеристики вершин и рёбер (дуг) графа. Граф, элементам которого поставлены в соответствие некоторые количественные характеристики (параметры), называют сетью.

В зависимости от практических приложений, различают электрические, телефонные, транспортные, нефтепроводные, газопроводные, ирригационные, информационные и т.п. сети. На конкретных сетях параметры, задаваемые на элементах графа, описывающего структуру сети, имеют вполне определённый смысл. Так, например, в электрических сетях в качестве параметров сети может выступать напряжение в электросети, в транспортных сетях – объемы перевозимых грузов, в информационных – объёмы передаваемой информации [8].

Будем говорить, что на вершинах графа *G* = (*I*, *U*) задана числовая функция, если каждой вершине *i*  *I* ставится в соответствие число . Аналогично, говорим, что на дугах графа задана числовая функция, если каждой дуге  ставится в соответствие число .

Возможно, что на одном и том же графе одновременно определены функции, как на вершинах, так и на дугах (рёбрах) графа. Таким образом, если на элементах графа заданы некоторые числовые функции, то такой граф называют сетью.

Если граф, описывающий структуру сети, ориентированный, то сеть ориентированная, если неориентированный, то сеть неориентированная. Аналогично вводятся понятия смешанной сети, связной и сильно связной сети; пути, контура, цепи и цикла в сети. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь связные сети, вершины которых пронумерованы правильно.

Основными элементами сетевой модели, а, следовательно, и сетевого графика является работа, событие и путь. Структура сетевого графика, определяющая взаимную зависимость работ и событий, называется его топологией.

Работой называется всякая целенаправленная деятельность человека по повышению некоторого комплекса операций, поставленных перед ним. Различают три вида работ: действительную работу, фиктивную работу и ожидание. Действительная работа - это работа, требующая затрат времени и ресурсов. Фиктивная работа не требует затрат времени и ресурсов, она только изображает логическую взаимосвязь между работами. Ожиданием называется работа, которая требует затрат времени, но не требует затрат ресурсов. На графике действительная работа и ожидание изображаются сплошной стрелкой (дугой): "→", а фиктивная работа - пунктирной стрелкой (дугой): ”---› ”.

Под событием понимается некоторый факт, результат окончания одной или нескольких работ, необходимый и достаточный для начала следующих работ. Событие не занимает ресурсов и времени. Оно совершается мгновенно, моментом его совершения является момент окончания всех входящих в него работ. Различают три вида событий: исходное, промежуточное и завершающе. Исходное событие - это такое событие, с которого начинается выполнение всего комплекса работ. На графике в соответствующую вершину не входит ни одна дуга (работа). Завершающее событие фиксирует факт выполнения всего комплекса работ, всего проекта. На графике из соответствующего события не выходит ни одна дуга (работа). Все остальные события являются промежуточными.

Сетевая модель графически представляется в виде ориентированного графа, вершины которого являются событиями, а дуги - работами.

Сетевые модели могут быть весьма разнообразны как по организа­ционной структуре производственной системы, так и по назначению сетевых графиков, а также используемым нормативным данным и средствам обработки информации.

По организационной структуреразличают внутрифирменные или отраслевые модели сетевого пла­нирования, по назначению*–*единичного и постоянного действия. Сетевые модели бывают детерминированные, вероятностные и сме­шанные. В детерминированных сетевых графиках псе работы страте­гического проекта, их продолжительность и взаимосвязь, а также требования к ожидаемым результатам являются заранее определен­ными. В вероятностныхмоделях многие процессы носят случайный характер. В смешанныхсетях одна часть работ является определенной, а другая –неопределенной. Модели могут быть также одноцелевыеи многоцелевые [35]*.*

Важнейшими этапами сетевого планирования самых разнообраз­ных производственных систем или иных экономических объектов являются следующие:

- разделение комплекса работ на отдельные части и их закреп­ление за ответственными исполнителями;

- выявление и описание каждым исполнителем всех событий и  
работ, необходимых для достижения поставленной цели;

- построение первичных сетевых графиков и уточнение содержа­ния планируемых работ;

- соединение частных сетей и построение сводного сетевого графи­ка выполнения комплекса работ;

- обоснование или уточнение времени выполнения каждой рабо­ты в сетевом графике.

## Построение сетевых графиков

Сетевые модели строятся на начальном этапе планирования. Планируемый процесс разбивается на отдельные работы, составляется перечень работ и событий, устанавливаются их логические связи и последовательность выполнения. Затем строится сетевой график, и рассчитываются параметры событий и работ, определяются резервы времени и критический путь. После чего проводятся анализ и оптимизация сетевого графика, который при необходимости строится заново с пересчётом параметров событий и работ.

При построении сетевых графиков следует соблюдать следующие правила:

1) В сети не должно быть событий (кроме исходного), в которые не входит ни одна дуга.

2) В сети не должно быть событий (кроме завершающего), из которых не выходит ни одна дуга.

3).Сеть не должна содержать контуров.

4) При выполнении параллельных работ, имеющих общее начальное и конечное событие, необходимо вводить дополнительные события и зависимости, т.к. нельзя допускать одинакового обозначения двух различных, параллельно выполняющихся работ (рисунок 1.1).

*i*1

*i*2

*i*1

*i*3

2

Рис. 1.1

а)

б)

*i*2

а) неправильное изображение; б) правильное изображение

5) Если работы (*i*2, *i*3); (*i*2, *i*5) на сетевом графике (рисунок 1.2) могут быть начаты до полного окончания непосредственно предшествующей им работы (*i*1, *i*2), то работу (*i*1, *i*2) следует представить как ряд последовательно выполняемых (*i*1, *i*2’), (*i*2′, *i*2′′), (*i*2′′, *i*2) работ, каждая из которых завершается соответственно событием *i*2′, *i*2′′, *i*2 как показано на рисунке 1.3.

*i*3

*i1*

*i*1

*i*5

*i*4

*i*2

*i*2

*i*5

*i*4

*i*3

*i*′′2

*i*′2

Рис. 1.2.

Рис. 1.3.

Работы (*i*2, *i*3) и (*i*2, *i*5) при этом изображены в виде работ (*i*2′, *i*3) и (*i*2′′, *i*5).

6) Если на сетевом графике (рисунок 1.4) для выполнения работы (*i*3, *i*4) необходимо выполнение всех предшествующих событию i3 работ, т.е. работ (*i*1, *i*3) и (*i*2, *i*3), а для выполнения работы (*i*3, *i*5).

Рис. 1.4.

Рис. 1.5.

*i*1

*i*1

*i*2

*i*2

*i*′3

*i*3

*i*3

*i*4

*i*4

*i*5

*i*5

Если необходимо выполнение только работы (*i*2, *i*3), то для правильного отражения этого факта в сеть надо ввести дополнительное событие *i*′3 и фиктивную работу (*i*′3, *i*3) как показано на рисунке 1.5. Работы (*i*2, *i*3) и (*i*3, *i*5) , при этом изображены в виде работ (*i*2, *i*′3) и (*i*′3, *i*5).

7) При построении сетевых графиков следует, по возможности, избегать большого числа пересечения дуг. Во многих случаях этого удается достичь рациональным размещением событий и соответствующих им работ. На рисунке 1.6. приводится изоморфное изображение сетевого графика с пересекающимися (а) и непересекающимися (б) дугами.

а)

б)

*i*1

*i*1

*i*2

*i*2

*i*3

*i*3

*i*4

*i*4

Рис. 1.6.

Для построения сетевого графика необходимо задать следующую информацию:

а) перечень всех работ;

б) последовательность их выполнения;

в) продолжительность выполнения каждой работы.

Таким образом, сетевой график данного комплекса работ является адекватной моделью процесса выполнения этого комплекса работ, представляющей собой сеть с одним входом (источником) и одним выходом (стоком), в которой каждой дуге (работе) приписано число, выражающее длительность выполнения этой работы.

Анализ построенного сетевого графика комплекса работ позволяет разобраться в данном комплексе работ: выявить работы, определяющие длительность всего комплекса работ, определить сроки выполнения работ, резервы времени работ и т.п.

Упорядочение сетевого графика заключается в таком расположении событий и работ, при котором для любой работы предшествующее ей событие расположено левее и имеет меньший номер по сравнению с завершающим эту работу событием. Другими словами, в упорядоченном сетевом графике все работы-стрелки направлены слева направо: от событий с меньшими номерами к событиям с бóльшими номерами.

Предположим, что при составлении некоторого проекта выделено 12 событий, обозначенные соответственно 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, и 24 связывающие их работы: (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 6), (3, 7), (3, 10), (4, 8), (5, 8), (5, 7), (6, 10), (7, 6), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (8, 9), (9, 11), (10, 9), (10, 11). Требуется составить и упорядочить сетевой график.

Как следует из представленного перечня работ, исходным событием сетевого графика является событие 0 (ему не предшествуют никакие работы), а завершающим событием - 11(за ним не следует ни одна работа). Поскольку изменение времени на сетевых графиках полагается слева направо, то событие 0 поместим в левую часть графика, а событие 11 - в правую часть. Между этими крайними событиями разместим промежуточные события в некотором порядке, который соответствует их номерам, и свяжем работами-стрелками согласно приведенному перечню работ (рисунок 1.7).

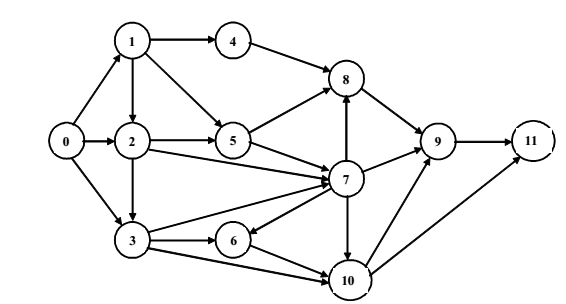


Рис. 1.7. Неупорядоченный сетевой график

Построенный сетевой график не является полностью упорядоченным. Выполним его упорядочение, для чего условно разобьем сетевой график на несколько вертикальных слоев, обводя каждый слой пунктирными линиями и обозначая его римскими цифрами (рисунок 1.8).

Поместив начальное событие 0 в слое I, мысленно вычеркнем из графика это событие и все выходящие из него работы-стрелки. Тогда без входящих стрелок останется событие 1, образующее слой II. Вычеркнув мысленно событие 1 и все выходящие из него работы, увидим, что без входящих стрелок остаются события 4 и 2, которые образуют III слой. Продолжая указанную процедуру вычеркивания, получим IV слой с событиями 5 и 3, V слой - с событием 7,

VI слой - с событиями 8 и 6, VII слой - с событием 10, VIII слой - с событием 9 и, наконец, IX слой - с событием 11.

Из полученного сетевого графика видно, что первоначальная нумерация событий не совсем правильна: событие 6 содержится в VI слое и имеет номер, меньший, чем событие 7 из V слоя. То же самое можно сказать о событиях 9 и 10.

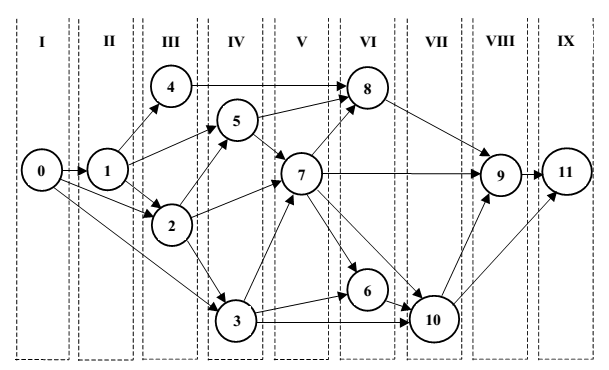


Рис. 1.8. Сетевой график с разбивкой по слоям

Изменим нумерацию событий в соответствии с их расположением на графике (рисунок 1.8) и получим упорядоченный сетевой график (рисунок 1.9), на котором над стрелками указана продолжительность соответствующих работ (в сутках).

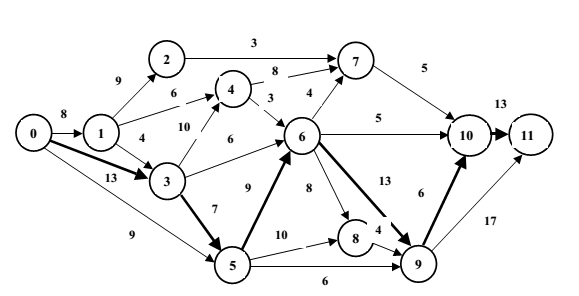


Рис. 1.9. Упорядоченный сетевой график

Порядок нумерации событий, расположенных в одном вертикальном слое, принципиального значения не имеет, так что нумерация одного и того же сетевого графика может быть неоднозначной.

Одним из важнейших понятий сетевого графика является понятие пути. Путь– любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей работы.

Пусть весь комплекс работ (проект) изображен в виде сетевого графика, имеющего *n* вершин. Для каждой дуги-работы (*i*, *j*) задана продолжительность ее выполнения *tij*> 0.которую будем называть длиной дуги-работы. Рассмотрим на графике любой путь, связывающий вершины *i1* и *ik* например:

Под длиной *Ts* пути будем понимать сумму длин дуг, составляющих этот путь, т.е. число . В сетевом графике различают три вида путей: полный путь, путь предшествующий данному событию *i*, и путь, следующий за данным событием *i*.

Путь сетевого графика называется *полным*, если его начальная вершина совпадает с исходным, а конечная – с завершающим событием сетевого графика.

Очевидно, что в сетевом графике имеется конечное число полных путей, предшествующих данному событию и следующих за данным событием.

Полный путь, имеющий наибольшую длину, называется критическим путем. Работы и события, принадлежащие критическому пути, называются соответственно критическими. Очевидно, что длина критического пути определяет минимально необходимое время выполнения всего комплекса работ в целом, которое называется критическим временем. И следовательно, если требуется сократить время выполнения всего комплекса работ, то в первую очередь надо искать возможность сокращения времени выполнения работ, лежащих на критическом пути (критических работ).

## Временные параметры сетевой модели

Для объективного планирования проекта нужно знать не только структуру взаимосвязей работ и длительность выполнения проекта, но и конкретные сроки начала и окончания выполнения задач, резервы времени, время наступления этапов проекта. Для этого рассчитываются временные параметры сетевого графика.

Временем свершения *Tj* любого события *j* будем считать время окончания всех работ, входящих в это событие. Для каждого события *j* сети можно рассчитать его ранний и поздний сроки свершения (наступления).

Ранний срок свершения любого события *j* равен продолжительности самого длинного из всех предшествующих ему путей. Для определения этих сроков можно воспользоваться алгоритмом Минти нахождения максимальных путей в сети.

Общая формула для определения раннего срока свершения события *j* записывается так:

где  - подмножество дуг сети, входящих в событие *j*.

Отметим, что если увеличится время выполнения любой из критических работ, то увеличится и соответственно критическое время, т.е. время выполнений всего проекта, увеличение времени выполнения некритических работ может и не отразиться на времени выполнения всего проекта.

Поздний срок свершения любого события равен разности между временем, отведенным на выполнение всего проекта, и продолжительностью самого длинного из всех следующих за этим событием путей. Поздний срок свершения завершающего события n равен раннему сроку его свершения , т.е. = . Поздний срок свершения любого события определяется по формуле (1.2):

(1.2)

где  - подмножество дуг сети, выходящих из события *i*. Для определения поздних сроков свершения событий удобно сетевой график просматривать от завершающего события к исходному. В конце вычислений должны получить, что = .

Каждое некритическое событие имеет резерв времени, который показывает, на какой срок может задержаться свершение события при условии, что завершающее событие выполнится в срок. Резерв времени *Rj* события *j* вычисляется по формуле (1.3):

(1.3)

Так как каждое событие сетевого графика имеет ранний и поздний срок свершения, поэтому и для каждой работы (*i*, *j*) можно определить ее раннее и позднее начало: и , и ее раннее и позднее окончание: и .

Ранний срок начала работы (*i*, *j*) равен раннему сроку свершения события *i*, т.е. = .

Поздний срок окончания работы (*i*, *j*) равен позднему сроку свершения события *j*, т.е. = .

Ранний срок окончания работы (*i*, *j*) равен раннему сроку ее начала плюс продолжительность работы, т.е.

(1.4)

Поздний срок начала работы (*i*, *j*) равен позднему сроку ее окончания минус продолжительность работы, т.е.

(1.5)

Поскольку начало и окончание каждой работы может изменяться в определенных выше пределах, работа может иметь некоторый резерв времени. Различают три вида резервов времени работ: полный, свободный и независимый, при которых срок свершения завершающего события не изменяется, т.е. не меняется срок выполнения всего комплекса работ.

Полный резерв времени работ (*i*, *j*) равен интервалу времени между ее ранним и поздним сроками начала, т.е.

(1.6)

Полный резерв времени работы (*i*, *j*) показывает, на сколько можно отодвинуть срок начала работы или увеличить ее продолжительность, при условии, что начальное событие *i* свершится в свой ранний, а конечное *j* в свой поздний сроки свершения.

Свободный резерв времени – это промежуток времени, которым располагает работа (*i*, *j*) при условии, что начальное *i* и конечное *j* события совершаются в свои ранние сроки. Он вычисляется по формуле (1.7):

(1.7)

Этот резерв времени показывает, на сколько можно отодвинуть срок начала работы (*i*, *j*) или увеличить ее продолжительность при условии, что начальное *i* и конечное *j* события совершаются в свои ранние сроки.

Независимый резерв времени – это промежуток времени, который определяется для работы (*i*, *j*) при условии, что начальное событие *i* происходит в свой поздний срок, а конечное *j* – в свой ранний срок свершения. Этот резерв времени существует не для всякой работы (*i*, *j*). Если промежуток времени между поздним сроком свершения события *i* и ранним сроком свершения события *j* меньше продолжительности работы (*i*, *j*), то независимый резерв времени для этой работы принимается равным нулю. Независимый резерв времени  определяется по формуле (1.8):

(1.8)

Он показывает, на какое время можно отодвинуть начало работы (*i*, *j*) или на сколько можно растянуть время ее выполнения при условии, что событие *i* произойдет в свой поздний, асобытие *j* – в свой ранний сроки свершения.

Критические работы никаких резервов времени не имеют, т.е. для таких работ резервы времени равны нулю. Значения критического времени, раннего и позднего начала работ, раннего и позднего их окончания и резервов времени работ называются временными параметрами сетевого графика.

Расчет временных показателей можно производить вручную только для сетевых графиков, имеющих сравнительно небольшое число событий. Если число событий исчисляется сотнями, следует использовать ЭВМ.

Временные параметры сетевого графика в случае небольшого числа событий можно определить, построив для него линейную диаграмму, т.е. график Ганта (рисунок 1.10).

4

4

3

3

3

4

3

2

2

2

1

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26

0

5

6

6

6

t

Рис. 1.10. Линейная диаграмма

Горизонтальная ось определяет шкалу времени *t*. Каждая работа изображается отрезком прямой (или полоской), параллельными оси времени *t*. Длина отрезка равна продолжительности *tij*работы *(i, j*). Фиктивная работа изображается точкой. Отрезки располагают один над другим параллельно друг другу в порядке возрастания индекса *j*, а для работ, входящих в одно и то же событие *j*, в порядке возрастания индекса *i*. Момент наступления исходного события 1 считают равным нулю. Отрезок *(i,j)* откладывают так, чтобы его начало *i* лежало на одной вертикали с самым правым концом всех предшествующих работ *(k,j).* Таким образом, начало отрезка *(i,j)* соответствует раннему сроку свершения события *i*.

## Выводы по главе

В первой главе квалификационной работы были рассмотрены теоретические аспекты сетевого планирования и управления (СПУ), связанные с построением сетевых моделей и методов расчёта временных параметров сетевых графиков.

Сетевое планирование как часть системы управления проектами стало объектом внимания и внедрения в связи с обострением конкуренции и падением прибыли. Основным плановым документом в системе СПУ является сетевой график (или сетевая модель), представляющий собой информационно-динамическую модель, в которой отражаются взаимосвязи и результаты всех работ, необходимых для достижения конечной цели проекта.

Управление процессом планирования и ходом выполнения сложных комплексов работ потребовало создания специальных методов сетевого планирования и управления (СПУ). В основу первых методов планирования и управления были положены так называемые графики цикличности, разработанные в конце XIX века английским инженером Гантом. Практика показала, что, как правило, реальные сроки выполнения проекта, его стоимость превышают те, которые были рассчитаны с помощью традиционных методов, использующих графики Ганта, опыт и интуицию руководителей.

В связи с этим появилась необходимость в создании новых методов, которые позволяли бы более эффективно осуществлять планирование, рационально использовать выделенные ресурсы, время, а также обеспечивали бы возможность четкого оперативного руководства ходом работ.

Методы сетевого планирования и управления основаны на моделировании процессов с помощью сетевого графика и представляют собой совокупность расчётных, организационных и контрольных мероприятий по эффективному планированию и управлению комплексом работ.

Для составления плана по реализации комплекса работ и создания автоматизированных систем управления сложными системами необходимо выбрать приемлемую математическую модель для описания управляемых процессов, в качестве которой в данном случае выступает сетевой график, который представляет собойэкономико-математическую модель, отражающую весь комплекс работ и событий, связанных с реализацией проекта в их логической и технологической последовательности и связи.

Математический аппарат сетевых моделей базируется на теории графов. Сетевые модели могут быть весьма разнообразны как по организа­ционной структуре производственной системы, так и по назначению сетевых графиков, а также используемым нормативным данным и средствам обработки информации.

Сетевые модели строятся на начальном этапе планирования. Планируемый процесс разбивается на отдельные работы, составляется перечень работ и событий, устанавливаются их логические связи и последовательность выполнения. Затем строится сетевой график и рассчитываются параметры событий и работ, определяются резервы времени и критический путь. После чего проводятся анализ и оптимизация сетевого графика, который при необходимости строится заново с пересчётом параметров событий и работ.

Для объективного планирования проекта нужно знать не только структуру взаимосвязей работ и длительность выполнения проекта, но и рассчитать временные параметры сетевого графика: ранний и поздний срок свершения каждого события, раннее и позднее начало и ее раннее и позднее окончание работ, резервы времени работ. Различают три вида резервов времени работ: полный, свободный и независимый, при которых срок свершения завершающего события не изменяется, т.е. не меняется срок выполнения всего комплекса работ.

Сетевые модели служат не только для планирования разнообразных долгосрочных работ, но и их координации между руководителями и исполнителями проектов, а также для определения необходимых производственных ресурсов и их рационального использования.

# Оптимизация сетевых моделей

## Анализ и оптимизация сетевых моделей

 Первоначально разработанная сетевая модель обычно не является лучшей по срокам выполнения работ и использования ресурсов. Поэтому исходная сетевая модель подвергается анализу и оптимизации по одному из ее параметров. Анализ созданных сетевых моделей позволяет выявить возможность достижения запланированных стратегических и тактических целей, оценить социально-экономическую эффективность конечных результатов и найти реальные пути оптимизации расходования ограниченных производственных ресурсов.

Построение сетевого графика следует начинать с выработки путей реализации комплекса работ штатными средствами. При этом необходимо определить, какие средства должны быть назначены на каждую работу комплекса, каким образом распределить работы между исполнителями и в какой последовательности и взаимосвязи их выполнять. После составления перечня работ, построения первого варианта сетевого графика целесообразно проанализировать его временные параметры и рассчитать резервы времени на некритических путях, а так же оценки вероятности выполнения проекта в заданный срок. Степень трудности выполнения в срок работ некритического пути можно определить с помощью коэффици­ента напряженности работ. Величина коэффициента напряженности помогает при установлении плановых сроков выполнения работ оценить, насколько свободно можно располагать имеющимися резервами времени. Этот коэффициент дает исполнителям работ представление о степени срочности работ и позволяет определить очередность их выполнения, если они не определяются технологическими связями работ.

На основании результатов анализа принимается решение на оптимизацию сетевого графика с целью сокращения времени выполнения проекта. В заключение дается оценка вероятности выполнения комплекса работ в заданные директивные сроки и устанавливаются временные нормативы.

Оптимизация сетевых графиков заключается  в улучшении процессов планирования, организации и управления комплексом работ с целью сокращения использования экономических ресурсов и повышения финансовых результатов при заданных плановых ограничениях.

В практике стратегического планирования в зависимости от конкретных условий предприятий или фирм оптимизация сетевых графиков подразделяется на частную и комплексную. Основными видами частной оптимизации являются два известных экономических подхода:

1. минимизация времени выполнения комплекса планируемых работ при заданной стоимости проекта;
2. минимизация стоимости всего комплекса работ при заданном времени выполнения проекта.

Комплексная оптимизация сетевых моделей состоит в нахождении наилучших соотношений показателей затрат экономических ресурсов и сроков выполнения планируемых работ применительно к определенным производственным условиям и ограничениям. В рыночных отношениях в качестве критерия оптимальности сетевых систем планирования могут быть выбраны такие экономические показатели, как максимальная прибыль (доход) от производства товаров и услуг, минимальный расход ресурсов на реализацию планов, максимальная производительность труда исполнителей, минимальные затраты рабочего времени на достижение конечной цели и т.д. [6].

**Оптимизация** сетевого графика  представляет процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. Оптимизация проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов. При этом время выполнения работ на некритических путях может остаться прежним или увеличиться без ущерба для общего времени выполнения комплекса работ. Сокращение или увеличение продолжительности работ связано с возрастанием или уменьшением средств на эти работы.

В оптимизированном сетевом графике обычно изменяются временные параметры, число событий и их нумерация. Последующий анализ снова выявляет наличие резервов. Этот процесс можно продолжать до получения варианта, характеризующегося минимальным значением критического времени и максимальной вероятностью выполнения комплекса работ в допустимые сроки.

С каждой работой, имеющей определенный объем, связаны затраты на ее выполнение. Затраты на выполнение работы возрастают с уменьшением ее продолжительности и снижаются при увеличении ее продолжительности.

В связи с этим возможны различные варианты организации работ, отличающиеся продолжительностью и затратами на их выполнение, что позволяет судить о возможности поиска оптимальных вариантов. При этом возникают следующие задачи оптимизации сетевого графика [16]:

- при заданной общей продолжительности проекта построить сетевой график комплекса работ, реализуемого с наименьшими затратами сил и средств;

- при заданных затратах сил и средств или минимальном их увеличении построить сетевой график комплекса работ, реализуемого в наиболее сжатые сроки.

При первой постановке задачи оптимизации необходимо составить сетевой график, чтобы при минимальных затратах средств и привлекаемых для работы исполнителей обеспечить выполнение комплекса работ в заданные сроки.

При второй постановке задачи оптимизации следует, учитывая штатные средства и силы, составить сетевой график, в соответствии с которым комплекс работ будет выполнен в минимальное время.

Оптимизация сетевого графика с целью сокращения времени выполнения комплекса работ достигается рядом способов:

• заменой последовательного выполнения работ на критическом пути параллельным;

• передачей ресурсов с работ на некритических путях на работы на критическом пути;

• привлечением для выполнения работ на критическом пути более квалифицированных исполнителей и производительных средств;

• введением дополнительных ресурсов и их использованием, прежде всего, для усиления средств и сил на критическом пути.

Рассмотрим оптимизацию сетевых графиков по критерию минимизации затрат временина выполнение отдельных процессов и всего комплекса работ. Анализ сетевых графиков и их временных параметров показывает, что общий срок свершения всех работ в сетевой модели следует сокращать в первую очередь за счет уменьшения критического пути, что не потребует больших затрат материальных и финансовых ресурсов. Этого можно достичь путём перераспределения всех видов ресурсов, как временных, так и трудовых, материальных, энергетических; сокращением трудоемкости критических работ за счет передачи части работ на другие пути, имеющие резервы времени; параллельным выполнением работ критического пути; пересмотром топологии сети, изменением состава работ и структуры сети [6].

В процессе сокращения продолжительности работ критический путь может измениться, и в дальнейшем процесс оптимизации бу­дет направлен на сокращение продолжительности работ нового критического пути, и так будет продолжаться до получения удовле­творительного результата. В идеале длина любого из полных путей может стать равной длине критического пути или, по крайней мере, пути критической зоны. Тогда все работы будут вестись с равным напряжением, а срок завершения проекта существенно сократится.

Рассмотрим оптимизацию сетевых графиков за счет минимизации расходования материальных ресурсов.В общем виде задачи планирования различных производственных ресурсов можно свести к определению оптимальных норм их расхода на единицу выполненной работы или распределению имеющихся ресурсов на весь комплекс работ. Одним из возможных способов сокращения критического пути может служить перераспределение различных ресурсов с ненапряженных путей на выполнение критических работ. При этом следует также иметь в виду тот факт, что сверхплановое насыщение критических работ ресурсами не беспредельно, ибо существуют определенные ограничения в ресурсах на каждом предприятии.

Экономическая эффективность от внедрения СПУ определяется в первую очередь возможностями уменьшения общего цикла работ и сокращением затрат за счет более рационального использования трудовых, материальных и  денежных ресурсов. Уменьшение длительности комплекса работ обеспечивает сокращение сроков окупаемости инвестиций, более раннему выводу товара на рынок, что способствует конкурентному успеху фирмы.

Весьма эффективным является использование метода стати­стического моделирования, основанного на многократных последо­вательных изменениях продолжительности работ и расчёт на компьютере различных вариантов сетевого графика с нахождением всех его временных параметров и коэффициентов напряженности работ. Процесс расчёта продолжается до тех пор, пока не будет получен приемлемый ва­риант плана или пока не будет установлено, что все имеющиеся возможности улучшения плана исчерпаны и поставленные перед разработчиком проекта условия невыполнимы.

В практике сетевого планирования при необходимости можно также осуществить комплексный анализ ресурсной, экономической и финансовой реализуемости стратегических и тактических планов.

Анализ ресурсной реализуемостивыполняется в два этапа. На первом –устанавливается наличие ресурсов по всем работам, на втором – разрабатываются способы рационального их использования.

Экономическая и финансовая реализуемость сетевых моделей тесно связаны между собой. Анализ экономической реализуемости проектных работ необходим для обоснования продолжительности их осуществления, при которой может быть достигнут наибольший финансовый результат или общий доход от реализации плана-проекта [29].

Анализ ресурсной, экономической и финансовой реализуемости стратегического плана проводится в аналогичной последовательности, но с учетом особенностей выполнения каждой стадии. Если в проекте будут использоваться только собственные производственные ресурсы, то следует сразу составить план их доставки на рабочие места исполнителей. При отсутствии наличных ресурсов должен быть разработан план их закупок, чтобы таким путем обеспечить своевременное выполнение комплекса планируемых работ всеми подразделениями фирмы. Когда определены продолжительность и стоимость всех работ, проводится окончательная проверка финансовой реализуемости стратегического плана-проекта. После выявления всех денежных потоков необходимо составить соответствующий перспективный, годовой, квартальный и месячный финансовый план.

В ходе проверки сетевого графика на экономическую и финансовую реализуемость предстоящего проекта может оказаться, что полученные экономические расчеты не соответствуют ранее выбранным целям и запланированным результатам. В этом случае следует пересмотреть приоритетные критерии распределения требуемых ресурсов и исследовать имеющиеся возможности получения дополнительных экономических результатов[6].

Анализ и оптимизация сетевой модели, представленной в графической или табличной форме, позволяет более четко выявить взаимосвязи этапов реализации проекта и определить наиболее оптимальный порядок выполнения этих этапов в целях сокращения сроков выполнения всего комплекса работ.

## Методика оптимизации сетевых моделей по критерию «время-затраты»

### 2.2.1. Оптимизация комплекса операций по времени

Оптимизация комплекса операций по времени сводится к сокращению продолжительности критического пути. Необходимость проведения оптимизации сетевого графика по времени возникает тогда, когда критическое время выполнения комплекса операций превосходит срок *Т0*, на котором настаивает ЛПР. Очевидно, подобная задача требует проведения определенных мероприятий и (или) вложения дополнительных средств.

Иногда оптимизация достигается за счет перепланировки сетевого проекта (изменения топологии сети). Например, одновременно выполняемые операции, имеющие резервы времени и не лежащие на критическом пути, могут выполняться последовательно (если это допускается технологией). Освободившиеся при этом ресурсы можно использовать на критических операциях, что ускорит их выполнение. Сокращение времени выполнения операций возможно также за счет автоматизации производственных процессов, улучшения организации работ, использования передовых технологий и т.д.

Оптимизация комплекса операций по времени может проводиться с привлечением дополнительных средств и с использованием внутренних резервов.

Приведем математическую формулировку процесса оптимизации по времени.

Пусть задан сетевой график выполнения комплекса операций. Время выполнения каждой операции равно . Пусть также вложение дополнительных средств в операцию сокращает время выполнения с до . Естественно, для каждой операции существует минимально возможное время ее выполнения, равное . Требуется определить время начала и окончания выполнения операций, а также величину дополнительных средств , которые необходимо вложить в каждую из операций , чтобы общее время выполнения комплекса операций было минимальным. При этом сумма вложенных дополнительных средств не должна превышать заданной величины *C*, а время выполнения каждой операции должно быть не меньше минимально возможного времени .

Математически условия задачи можно записать следующим образом

(2.1)

(2.2)

(2.3)

(2.4)

(2.5)

(2.6)

Добавив при необходимости фиктивную операцию, выходящую из последнего события, целевую функцию любого графика можно записать в виде выражения (2.1).

Ограничения-равенства (2.4) показывают зависимость продолжительности выполнения операций от вложенных средств. Ограничения (2.5) обеспечивают выполнение условий предшествования операций в соответствии с топологией сети (время начала выполнения каждой операции должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей операции).

Критический путь в данной задаче является функцией от объемов дополнительно вкладываемых средств .

Сформулированная задача относится к классу оптимизационных задач и может быть решена методами линейной или нелинейной оптимизации в зависимости от вида функций .

Приведем пример решения задачи оптимизации комплекса операций по времени путем затрат дополнительных средств.

Комплекс операций представлен сетевым графиком (рисунок 2.1). Цифры, приписанные дугам, означают соответственно продолжительность и минимально возможное время выполнения операций (в днях).

Продолжительность выполнения операций зависит линейно от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением

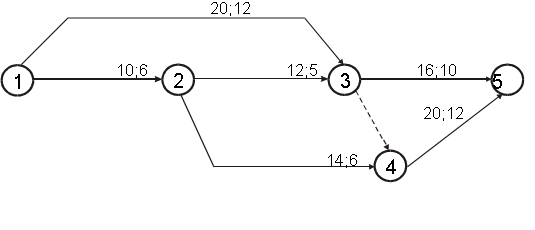


Рис. 2.1.

Требуется оптимизировать сетевой график по времени, т.е. определить время выполнения каждой операции сетевого графика таким образом, чтобы время выполнения комплекса операций было минимальным, а сумма вложенных средств  не превышала 15 единиц.

Добавив на сетевом графике фиктивную операцию (5,6), запишем целевую функцию в виде

Запишем ограничения задачи:

* сумма вложенных средств не должна превышать наличного их количества
* время выполнения каждой операции должно быть не меньше минимально возможного времени
* зависимость продолжительностей операций от вложенных средств дает ограничения-равенства
* время начала выполнения каждой операции должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей операции (моменты времени );
* условие неотрицательности неизвестных

для всех дуг сетевого графика.

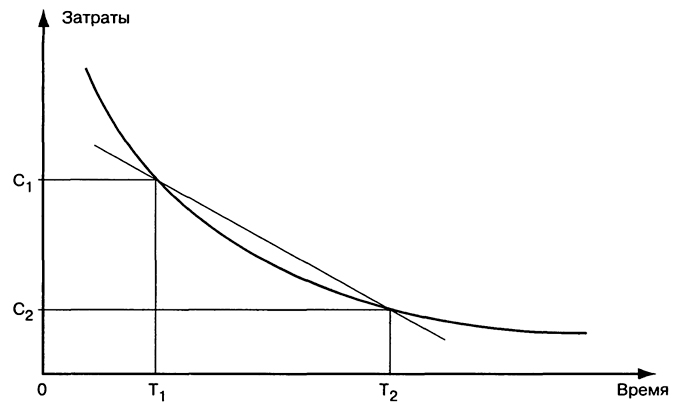
Таким образом, чтобы выполнить комплекс операций за 29,65 дней, необходимо вложить в операцию (1,3) 0,88 д.е., в операцию (2,3) – 3,92 д.е., в (2,4) – 0,83 д.е., и в операцию (3,5) – 9,38 д.е.

### 2.2.2. Оптимизация комплекса операций по общей стоимости работ при фиксированном сроке выполнения проекта

Рассмотрим способ оптимизации сетевых графиков за счет минимизации расходования материальных ресурсов*,* В общем виде зада­чи планирования различных производственных ресурсов можно све­сти к определению оптимальных норм их расхода на единицу выпол­ненной работы или распределению имеющихся ресурсов на весь ком­плекс работ. Одним из возможных способов сокращения критическо­го пути может служить перераспределение различных ресурсов с не­напряженных путей на выполнение критических работ. При этом следует также иметь в виду тот факт, что сверхплановое насыщение критических работ ресурсами не беспредельно, ибо существуют опре­деленные ограничения в ресурсах на каждом предприятии.

Важнейшей комплексной проблемой оптимизации сетевых графиков являетсяминимизация стоимости,которая характеризует наименьшие суммарные издержки на осуществление всего комплекса запланированных работ. При этом методе исходят из того экономического предположения, что величина издержек на выполнение той или иной работы находится при одинаковых условиях в обратной зависимости от затрат рабочего времени на ее выполнение. Если все запланированные работы будут выполняться с рассчитанной в сетевом графике точностью, то общая стоимость разработанного плана-проекта будет минимальной. С ускорением работ затраты возрастают, а с их замедлением - снижаются. Причем при минимальной продолжительности работ их стоимость становится максимальной, а при максимальной длительности затраты будут минимальными.

Зависимость стоимости выполнения работы от ее продолжительности представлена на рисунке 2.2. Кривая наглядно показывает обратную зависимость: снижение затрат (*С*) связано с увеличением времени выполнения работ (*Т*).



**Рис. 2.2.**Графическая зависимость «время-затраты»

Рассмотрим частный случай оптимизации комплекса операций по стоимости (затратам). Будем предполагать, что затраты на выполнение отдельных операций находятся в обратной зависимости от продолжительности их выполнения. Коэффициент дополнительных затрат (КДЗ) этой зависимости для операции вычисляется по формуле

, (2.7)

где – срочный режим выполнения операции (наименьшая продолжительность), которому соответствуют наибольшие затраты ; – нормальный режим выполнения операции (наибольшая продолжительность), которому соответствуют минимальные затраты .

Коэффициент дополнительных затрат показывает, насколько увеличится стоимость операции при уменьшении ее продолжительности на единицу времени.

Отличительная особенность оптимизации при фиксированном сроке выполнения комплекса операций заключается в том, что в исходном варианте сети оценки для каждой операции установлены на уровне минимальных продолжительностей и максимальных затрат . Следовательно, стоимость выполнения всего комплекса операций является максимальной. Предполагается, что увеличение продолжительности операции на 1 ед. вызывает уменьшение стоимости на величину . Таким образом, ставится задача: при фиксированном сроке завершения To минимизировать стоимость выполнения комплекса операций, используя резервы времени. Критическое время может быть меньше заданного срока To или равно ему. Если , то оптимизация возможна за счет увеличения времени выполнения некритических операций; если , то оптимизировать можно за счет всех операций комплекса.

Рассмотрим более общий случай, когда .

Обозначим стоимость выполнения операции через . Исходя из условия задачи, стоимость каждой операции за время ее выполнения определим по формуле

(2.8)

где . Учитывая, что величины известны, раскроем скобки в правой части (2.8) и обозначим через сумму .

В результате получим

(2.9)

Здесь время выполнения операции  равно разности между временем ее окончания и временем начала .

Математическая модель задачи может быть сформулирована следующим образом: найти такое время начала и окончания каждой операции сетевого графика, при котором стоимость выполнения комплекса операций будет минимальной

На неизвестные величины задачи налагаются следующие ограничения:

* продолжительность выполнения каждой операции должна быть не меньше и не больше
* время окончания любой операции сетевого графика должно быть не больше времени начала непосредственно следующей за ней операции, т.е. для любых смежных операций сети и должно выполняться условие
* выполнение комплекса операций должно быть завершено не позже директивного срока To:
* переменные должны быть неотрицательными

Рассмотрим пример оптимизации проекта по стоимости за счет увеличения продолжительности отдельных операций.

Исходные данные комплекса операций, представленного сетевым графиком (рисунок 2.3), приведены в таблице 2.1.

Требуется оптимизировать сетевой график по стоимости при *To=*34.

1

5

4

3

2

Рис. 2.3. Сетевой график

Таблица 2.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметры | Операции | | | | | | |
| (1,2) | (1,3) | (2,3) | (2,5) | (3,4) | (3,5) | (4,5) |
|  | 9 | 10 | 0 | 3 | 4 | 5 | 8 |
|  | 11 | 15 | 0 | 5 | 7 | 8 | 10 |
|  | 2 | 5 | - | 5 | 4 | 10 | 3 |
|  | 20 | 40 | - | 30 | 45 | 50 | 25 |

Запишем , для всех , принадлежащих сетевому графику

При записи функции принято, что

Так как при параметрах меньше To=34, то оптимизация возможна за счет всех операций сетевого графика.

Запишем ограничения по времени выполнения операций

Ограничения по предшествованию в выполнении операций:

Все неизвестные должны быть неотрицательными, т.е. для всех операций сети.

В результате решения получим ответ

Таким образом, при заданном сроке выполнения проекта To=34дн. минимальная стоимость его реализации составляет 170 д.е.

## Сетевое планирование в условиях неопределённости

При определении временных параметров сетевого графика до сих пор предполагалось, что продолжительность каждой работы точно известна. На практике, однако, такое предположение выполняется редко, поскольку СПУ обычно применяется для планирования уникальных разработок (проектов), не имеющих аналогов выполнения в прошлом. Как правило, продолжительность каждой работы по сетевому графику заранее не известна и может принимать лишь одно из ряда возможных значений, т.е. является случайной величиной, характеризующейся своим законом распределения и, следовательно, своими числовыми характеристиками – средним значением, или математическим ожиданием*,* и дисперсией*.*

В большинстве систем СПУ принимается, что распределение продолжительности работ обладает следующими тремя свойствами:

- непрерывностью;

- унимодальностью, т.е. наличием единственного максимума у кривой распределения;

- двумя точками пересечения кривой распределения с осью *Ox*, имеющими неотрицательные абсциссы.

Кроме того, распределение продолжительности работ обладает положительной асимметрией, т.е. максимум кривой распределения смещен относительно медианы (линии, делящей площадь под кривой на две равные части). Другими словами, кривая распределения более круто поднимается при удалении от минимального значения *t* и полого опускается при приближении к максимальному значению *t* (рисунок 2.4).

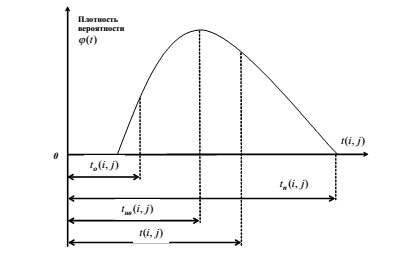


Рис. 2.4. Распределение и временные оценки продолжительности работы

Простейшим распределением, обладающим перечисленными свойствами, является известное в математической статистике β–распределение. Продолжительность выполнения работ часто трудно задать точно, и потому в практической работе вместо одного числа (детерминированная оценка) задаются две оценки – минимальная и максимальная [35].

Минимальная (оптимистическая) оценка   характеризует продолжительность выполнения работы при наиболее благоприятных обстоятельствах, а максимальная (пессимистическая) – при наиболее неблагоприятных. Продолжительность работы в этом случае рассматривается, как случайная величина, которая в результате реализации может принять любое значение в заданном интервале. Такие оценки называются вероятностными (случайными), и их ожидаемое значение *т*oж оценивается по формуле:

(2.10)

Для характеристики степени разброса возможных значений вокруг ожидаемого уровня используется показатель дисперсии *S2:*

(2.11)

На основе этих оценок можно рассчитать все характеристики сетевой модели (СМ), которые будут выступать как средние характеристики. При достаточно большом количестве работ, общая продолжительность любого, в том числе и критического, пути имеет нормальный закон распределения со средним значением, равным сумме средних значений продолжительности составляющих его работ, и дисперсией, равной сумме дисперсий этих же работ.

Кроме обычных характеристик СМ, при вероятностном задании продолжительности работ можно решить две дополнительные задачи:

1) определить вероятность того, что продолжительность критического пути не превысит заданного директивного уровня *Т*;

2) определить максимальный срок выполнения всего комплекса работ *Т* при заданном уровне вероятности *р*.

Первая задача решается на основе интеграла вероятностей Лапласа *Ф(Z)* с использованием формулы:

(2.12)

где нормированное отклонение случайной величины:

(2.13)

где *S*кр – среднее квадратическое отклонение, вычисляемое как корень квадратный из дисперсии продолжительности критического пути.

Соответствие между  *Z*  и симметричным интегралом вероятностей приведено в таблице 2.2. Более точно соответствие между этими величинами (когда *Z* вычисляется более чем с одним знаком в дробной части) можно найти в специальной статистической литературе.

Если мала (например, меньше 0,3), то опасность срыва заданного срока выполнения комплекса велика, необходимо принятие дополнительных мер (перераспределение ресурсов по сети, пересмотр состава работ и событий и т. п.). Если значительна (например, более 0,8), то, очевидно, с достаточной степенью надежности можно прогнозировать выполнение проекта в установленный срок.

Для решения второй задачи используется формула:

(2.14)  
Таблица 2.2

Фрагмент таблицы стандартного нормального распределения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| z | Ф (z) | z | Ф (z) |
| 0,1 | 0,0797 | 1,5 | 0,8664 |
| 0,2 | 0,1585 | 1,6 | 0,8904 |
| 0,3 | 0,2358 | 1,7 | 0,9104 |
| 0,4 | 0,3108 | 1,8 | 0,9281 |
| 0,5 | 0,3829 | 1,9 | 0,9545 |
| 0,6 | 0,4515 | 2,0 | 0,9643 |
| 0,7 | 0,5161 | 2,1 | 0,9722 |
| 0,8 | 0,5763 | 2,2 | 0,9786 |
| 0,9 | 0,6319 | 2,3 | 0,9836 |
| 1,0 | 0,6827 | 2,4 | 0,9876 |
| 1,1 | 0,7287 | 2,5 | 0,9907 |
| 1,2 | 0,7699 | 2,6 | 0,9931 |
| 1,3 | 0,8064 | 2,7 | 0,9949 |
| 1,4 | 0,8385 | 2,8 | 0,9963 |

Кроме описанного способа расчета сетей с детерминированной структурой и вероятностными оценками продолжительности выполнения работ, используется метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). В соответствии с ним на вычислительной технике многократно моделируется продолжительность выполнения работ и рассчитываются на основе этого основные характеристики сетевой модели. Большой объем испытаний позволяет более точно выявить закономерность моделируемой сети.

Рассмотрим следующий пример. Структура сетевой модели и оценки продолжительности работ (в сутках) заданы в таблице 2.2. Требуется:  
а) получить все характеристики СМ;

б) оценить вероятность выполнения всего комплекса работ за 35 дней, за 30 дней;  
в) оценить максимально возможный срок выполнения всего комплекса работ с надежностью 95% (т. е. р=0,95).

Три первые графы таблицы 2.2 содержат исходные данные, а последние две графы – результаты расчетов по формулам.

Получим сетевую модель (рисунок 2.5).

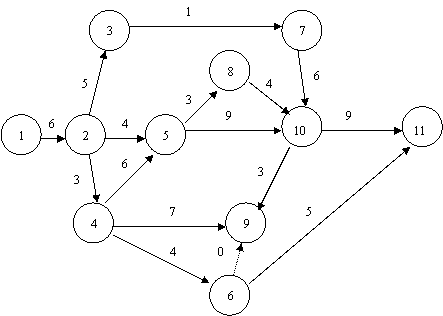


Рис.2.5.

Таблица 2.3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Работа | Продолжительность | Ожидаемая продолжительность | Дисперсия |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***(i,j)*** | ***тmin(i,j)*** | ***тmax(i,j)*** | ***тож(i,j)*** | ***S2(i,j)*** |
| (1.2) | 5 | 7.5 | 5 | 0.25 |
| (2.3) | 4 | 6.5 | 5 | 0.25 |
| (2.4) | 3 | 6 | 3 | 1.00 |
| (2.5) | 1 | 5.5 | 4 | 0.25 |
| (3.7) | 0.5 | 3.5 | 1 | 0.36 |
| (4.5) | 5 | 7.5 | 6 | 0.25 |
| (4.6) | 3 | 5.5 | 4 | 0.25 |
| (4.9) | 5 | 10 | 7 | 1.00 |
| (5.8) | 2 | 4.5 | 3 | 0.25 |
| (5.10) | 7 | 12 | 9 | 1.00 |
| (6.9) | 0 | 0 | 0 | 0.00 |
| (6.11) | 3 | 8 | 5 | 1.00 |
| (7.10) | 4 | 9 | 6 | 1.00 |
| (8.10) | 2 | 7 | 4 | 1.00 |
| (9.10) | 1 | 6 | 3 | 1.00 |
| (10.11) | 8 | 10.5 | 9 | 0.25 |

Таким образом, ход расчета характеристик модели остается аналогичен рассмотренному ранее. Критическим является путь: *Lкр=(1,2,4,5,10,11),* а его продолжительность равна *ткр=tож=33* дня.

Дисперсия критического пути составляет:

*S2КП=S2(l,2)+S2(2,4)+S2(4,5)+S2(5,10)+S2(10,М)=0,25+1,00+0,25+1,00+0,25=2,75.*

Для использования формулы показателя дисперсии необходимо иметь среднее квадратическое отклонение, вычисляемое путем извлечения из значения дисперсии квадратного корня, т. е. *SКП=1,66*.

Тогда имеем:

*Р(tкр<35)=0,5+0,5Ф{(35-33)1,66}=0.5+0.5Ф(1,2)=0,5+0,5•0,77=0,885*  
 *Р(tкр<30)=0,5+0,5Ф{(30-33)/1,66}=0,5-0,5Ф(1,8)=0,5-0,5•0,95=0,035.*

Таким образом, вероятность того, что весь комплекс работ будет выполнен не более чем за 35 дней, составляет 88,5%, в то время как вероятность его выполнения за 30 дней – всего 3,5% .

Для решения второй (по существу обратной) задачи прежде всего в табл. 5.2. найдем значение аргумента *Z*, которое соответствует заданной вероятности 95%. В графе Ф(*Z*) наиболее близкое значение (0,9545•100%) к ней соответствует Z=1,9. В этой связи в формуле будем использовать именно это (не совсем точное) значение. Тогда получим:

*Т=tож(Lкр)+Z•SКП=33+1,9•1,66=36,2 дн.*

Следовательно, максимальный срок выполнения всего комплекса работ при заданном уровне вероятности *р=95%* составляет 36,2 дня.

Значения функции Лапласа определяются с помощью значений таблицы функций Лапласа или с помощью функции «НОРМ.РАСП» в среде MS Excel.

## Выводы по главе

Во второй главе квалификационной работы раскрыты основные теоретические аспекты, связанные с анализом и оптимизацией сетевых моделей, показана методика оптимизации сетевых графиков по критерию «время-затраты» и описано сетевое планирование в условиях неопределённости.

Анализ сетевой модели, представленной в графической форме, позволяет, во-первых, более четко выявить взаимосвязи этапов реализации проекта и, во-вторых, определить наиболее оптимальный порядок выполнения этих этапов в целях, например, сокращения сроков выполнения всего комплекса работ.

Оптимизация сетевого графика представляет процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. Она проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, сокращения общей стоимости работ, рационального использования ресурсов и др.

В данной главе описана методика и приведены примеры оптимизации сетевого графика по критерию «время-затраты», которая осуществляться по следующим двум направлениям:

1. минимизация времени выполнения комплекса работ при заданных затратах на это выполнение;

2. минимизация затрат на выполнение комплекса работ при заданном времени этого выполнения.

Продолжительность выполнения работ часто трудно задать точно, и потому в практической работе вместо одного числа (детерминированная оценка) задаются две оценки – минимальная и максимальная. Продолжительность работы в этом случае рассматривается, как случайная величина, которая в результате реализации может принять любое значение в заданном интервале.

Кроме обычных характеристик сетевой модели при вероятностном задании продолжительности работ можно решить две дополнительные задачи:

1) определить вероятность того, что продолжительность критического пути не превысит заданного директивного уровня;

2) определить максимальный срок выполнения всего комплекса работ при заданном уровне вероятности.

Кроме описанного способа расчета сетей с детерминированной структурой и вероятностными оценками продолжительности выполнения работ, используется метод статистических испытаний. В соответствии с ним на вычислительной технике многократно моделируется продолжительность выполнения работ, и рассчитываются на основе этого основные характеристики сетевой модели. Большой объем испытаний позволяет более точно выявить закономерность моделируемой сети.

# Расчёт и оптимизация сетевой модели планирования поставок товаров оптовым покупателям

## Постановка задачи

В постоянно усиливающейся нестабильности рыночных условий сроки поставки товаров оптовым покупателямимеют чрезвычайно важное значение в деятельности торговых фирм. Опоздание поставок товаров на рынок по сравнению с конкурентами делает напрасными усилия и затраты на его реализацию, то есть приводит к невосполнимым убыткам, иногда влекущим банкротство. Поэтому сокращение сроков поставок товаров является центральной задачей, которая решается путем снижения продолжительности этапов и повышения степени их параллельности.

Основным материалом для сетевого планирования и оптимизации сетевых моделей является список или перечень работ комплекса, в котором указаны не только работы, но и их взаимная обусловленность (окончание каких работ требуется для начала выполнения каждой работы). Будем называть такой список структурной таблицей комплекса работ.

В таблице 3.1 представлена упорядоченная структурно-временная таблица перечня работ по организации поставки куриной продукции оптовым покупателям торговой фирмы г. Бендеры, содержащая наименование работ, продолжительности работ и их стоимость при нормальном режиме и при ускоренном режиме, число исполнителей работы; общие и косвенные затраты на проект; ограничение по средствам, выделенным на проведение оптимизации и фиксированный срок завершения проекта.

Таблица 3.1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Содержание работы | Работа,  *аi* | Предшествующие работы  *аj* | Нормальный режим | | Ускоренный режим | |
| Длительность работы, дни | Стоимость выполнения работы, руб. | Длительность работы, дни | Повышенная стоимость работы,руб. |
| Отбор товара | а1 | - | 3 | 550 | 2 | 600 |
| Подготовка к отправке | а2 | а1 | 1 | 225 | 0.5 | 300 |
| Определение объёма отгрузки | а3 | а1 | 1 | 75 | 0,5 | 100 |
| Проверка цен | а4 | а1 | 0,5 | 37,5 | 0,25 | 50 |
| Оформление счёта | а5 | а4 | 1 | 75 | 0,5 | 100 |
| Выписка накладной | а6 | а5 | 1 | 75 | 0,5 | 100 |
| Заказ автомашины | а7 | а3, а6 | 3 | 850 | 2 | 900 |
| Отправка счёта покупателю | а8 | а5 | 1 | 100 | 0,5 | 120 |
| Проверка товаров по счёту | а9 | а8 | 0,5 | 50 | 0,25 | 60 |
| Оплата счёта | а10 | а9 | 0,5 | 50 | 0,25 | 60 |
| Погрузка товара и проверка количества | а11 | а2, а7, а10 | 1 | 225 | 0,5 | 300 |
| Перевозка товара | а12 | а11 | 3 | 500 | 2 | 600 |
| Разгрузка товара и сверка с документами | а13 | а12 | 1 | 225 | 0,5 | 300 |
| *Спр*- прямые затраты на выполнение всего проекта |  |  |  | 3037,5 |  | 3590 |
| - ежедневные косвенные затраты организации, выполняющей проект, руб/день | =150 руб/день | | | | | |
| - ограничение по средствам, выделенным на проведение оптимизации, руб. | =4700 руб. | | | | | |
| *T0*- фиксированный срок завершения проекта (директивный срок) | *T0*=14 | | | | | |

Требуется провести оптимизацию сетевой модели поставки товаров оптовым покупателям. Для этого:

- построить сетевой график, определить критический путь (и его продолжительность) и продолжительность остальных путей;

- рассчитать временные параметры сетевой модели, ранние начала и окончания работ, поздние начала и окончания работ, полный, свободный и независимые резервы времени работ и резервы времени событий; исходные данные и расчёты свести в таблицу;

- провести максимально возможное сокращение времени выполнения проекта без учета заданного ограничения на денежные средства *С0*;

- построить график прямых, косвенных и общих затрат для проведенной оптимизации;

- определить минимально возможную длительность выполнения проекта с учетом заданного ограничения на денежные средства , отобразить принятое решение на графике затрат.



## Построение сетевого графика и расчёт временных параметров сетевой модели планирования поставки товаров оптовым покупателям

График планирования поставки товаров оптовым покупателям должен отражать существенные в отношении достижения конечных целей работы (этапы, фазы и т.д.). Он должен также учитывать возможные состояния комплекса соответствующих работ, сроки их выполнения, возможные нарушения этих сроков и последствия нарушений.

Построим сетевой график по данным, приведённым в таблице 3.1 (рисунок 3.1). При таком варианте задания исходных данных, когда структура сетевой модели определяется номером предшествующих работ, построение сетевого графика начинается с конца.

I

II

II

II

III

а1

а2

а3

а4

а5

а6

а7

а8

а9

a10

a11

a12

a13

IV

IVV

V

VI

VII

VIII

IX

X

Рис. 3.1.

Пронумеруем вершины по методу вычеркивания дуг. Исходной вершине присвоим номер 1. Исключим (вычеркнем) дуги, выходящие из этой вершины (на чертеже они перечеркнуты одной черточкой). Без входящих дуг оказалась вершина, которой присвоим номер 2. Затем исключим (вычеркнем) все дуги. выходящие из вершины 2 на чертеже они перечеркнуты двумя черточками, (вершине, оказавшейся без входящих дуг присвоим номер 3. Продолжая процесс вычеркивания дуг, присвоим номера остальным вершинам графика.

Сложность сетевого графика оценивается коэффициентом сложности, который определяется по формуле:

где *Kc* – коэффициент сложности сетевого графика; *npaб*– количество работ; *ncoб* – количество событий.

Сетевые графики, имеющие коэффициент сложности от 1,0 до 1,5, являются простыми, от 1,51 до 2,0 – средней сложности, более 2,1 – сложными.

Поскольку *Kc* < 1.5, то сетевой график является простым.

Найдём минимальный срок завершения комплекса работ. Для этого рассчитаем ранний срок наступления события *j*, который показывает самый ранний (ожидаемый) срок наступления события и вычисляется по формуле:

где *Tр* - ранний срок наступления события предшествующего событию *i, tij*– время выполнения работы *ij, Т1р=0.* Звездочкой помечены дуги, для которых в формуле достигаются максимальные значения



3

1

1

0,5

1

1

0,5

0,5

3

3

1

1

1

Рис.3.2.

Данный комплекс работ может быть выполнен за 13,5 дней. Критический путь найдем, двигаясь от завершающего события к исходному вдоль помеченных звездочкой дуг в направлении, противоположном их ориентации:  Этот путь выделен на графике жирными линиями.

Определим все пути, присутствующие в сетевом графике. Таких путей можно выделить четыре. В первый путь (L1) входят работы а1, а4, а5, а6, а7, а11, а12, а13. Во второй путь (L2) входят работы а1, а3, а7, а11, а12, а13. В третий путь (L3) входят работы а1, а4, а5, а8, а9, а10, а11, а12, а13. В четвёртый путь (L4) входят работы а1, а2, а11, а12, а13. Рассчитаем длительности всех четырёх путей:

T1 = 3 + 0,5 + 1 + 1 + 3 + 1 + 3 + 1 = 13,5 дней,

T2 = 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + 1 = 12 дней,

T3 = 3 + 0,5+ 1 + 1 + 0,5 + 0,5 + 1 + 3 + 1 = 11,5 дней,

T4 = 3 + 1+ 1 + 3 + 1= 9 дней.

Результаты расчёта показывают, что критическим является первый путь.

(дней).

Изобразим сетевой график заново и найдем поздние сроки свершения событий, двигаясь от вершины 11 к вершине 1. При этом поздний срок свершения завершающего события равен его раннему сроку: =13,5. Поздние сроки свершения остальных событий находим по формуле:

Рис.3.3

3

1

1

0,5

1

1

0,5

0,5

3

3

1

1

1

Значения последовательно запишем на графике *y* вершины *i*. Занесем полученные данные в таблицу 3.2 (отметим звездочкой критические события). Критические события 1,2,3,4,5,8,9,10,11 имеют нулевые резервы времени: *R* = 0.

Таблица 3.2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Событие | Ранний срок  свершения | Поздний срок свершения |
| 1\* | 0 | 0 |
| 2\* | 3 | 3 |
| 3\* | 3.5 | 3.5 |
| 4\* | 4.5 | 4,5 |
| 5\* | 5,5 | 5,5 |
| 6 | 5,5 | 7,5 |
| 7 | 6 | 8 |
| 8\* | 8,5 | 8,5 |
| 9\* | 9,5 | 9,5 |
| 10\* | 12,5 | 12,5 |
| 11\* | 13,5 | 13,5 |

Временные параметры сетевого графика, найденные по ниже приведенным формулам, запишем в таблицу 3.4. В первом столбце этой таблицы записываем все работы (*i,j*) сетевого графика. Работы записываются в порядке возрастания индекса *j*, а для работ с одинаковым индексом *j* – в порядке возрастания индекса *i*. Во второй столбец заносятся продолжительности соответствующих работ. В остальные столбцы будем записывать найденные значения временных параметров.

Раннее начало работы (*i*, *j*):

Раннее окончание работы (*i*, *j*):

Позднее окончание:

Позднее начало:

Полный резерв времени:

Свободный резерв:

Независимый резерв:

Таблица 3.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Работа (*i*, *j*) |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| (1,2) \* | 3 | 0 | 0 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| (2,3) \* | 0,5 | 3 | 3 | 3,5 | 3,5 | 0 | 0 | 0 |
| (2,5) | 1 | 3 | 4,5 | 4 | 5,5 | 1,5 | 1,5 | 1 |
| (2,8) | 1 | 3 | 7,5 | 4 | 8,5 | 4,5 | 4,5 | 4,5 |
| (3,4) \* | 1 | 3,5 | 3,5 | 4,5 | 4,5 | 0 | 0 | 0 |
| (4,5) \* | 1 | 4,5 | 4,5 | 5,5 | 5,5 | 0 | 0 | 1 |
| (4,6) | 1 | 4,5 | 6,5 | 5,5 | 7,5 | 2 | 0,5 | 0 |
| (5,8) \* | 3 | 5,5 | 5,5 | 8,5 | 8,5 | 0 | 0 | 0 |
| (6,7) | 0,5 | 5,5 | 7,5 | 6 | 8 | 2 | 0 | 0 |
| (7,8) | 0,5 | 6 | 8 | 6,5 | 8,5 | 2 | 2 | 0 |
| (8,9)\* | 1 | 8,5 | 8,5 | 9 | 9,5 | 0 | 0 | 0 |
| (9,10) \* | 3 | 9,5 | 9,5 | 12,5 | 12,5 | 0 | 0 | 0 |
| (10,11)\* | 1 | 12,5 | 12,5 | 13,5 | 13,5 | 0 | 0 | 0 |

Работы, лежащие на критическом пути, никаких резервов времени не имеют, поэтому в соответствующих строках записаны нули. Резервы времени работ показывают, насколько можно оттянуть начало работы или растянуть её продолжительность так, чтобы при этом не изменилось минимальное время выполнения всего проекта.

Например, работа (2, 8) – подготовка к отправке – имеет полный резерв времени = 4,5 дней. Это означает, что эту работу можно начать не через 3 дня после начала выполнения всего комплекса работ, а через 3+ 4,5 = 7,5 дней после начала проекта, и выполнять её 1 день, тогда завершим ее через 8,5 дней (позднее окончание). Или можно начать заказ и выполнение типового проекта в ранние сроки, т.е. через 3 дня после начала проекта, но выполнять 1 + 4,5 = 5,5 дней, тогда ее можно завершить через 3+5,5=8,5 дней.

## Расчёт коэффициентов напряжённости сетевого графика

Проводя оптимизацию сетевых графиков по кри­терию минимизации затрат временина выполнение отдельных про­цессов и всего комплекса работ, общий срок свершения всех работ в сетевой модели можно сокращать в первую очередь за счет уменьшения критического пути. Этот шаг основан на анализе временных показателей графика и не требует больших затрат материальных и финансовых ресурсов. Анализ сети проводится с целью выравнива­ния продолжительности наиболее напряженных путей. В общем виде коэффициент напряженности любого полного пути определяется от­ношением его длительности к критическому пути :

(3.1)

Расчет и анализ коэффициентов напряженности сетевых путей наряду с резервами времени позволяет распределить все работы по трем зонам: критическая, подкритическая и резервная. В разработанном нами графике коэффициенты напряженности всех путей будут иметь следующие значения.

Первый путь *T1* – критический путьпроходит через события 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 8 – 9 – 10 – 11 и равен 13,5 дней. Коэффициент напряженности этого пути составляет:

Второй путь *T2*, проходящий через события 1 – 2 – 5 – 8 – 9 – 10 –11, равен 12 дням, а коэффициент напряженности – 0,889.

Третий путь *T3*, равный 11,5 дням, пролегает по событиям 1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11. Коэффициент его напряженности имеет значение 0,852.

Четвертый путь *T4*, проходящий через события 1 – 2 – 8 – 9 – 10 –11, равен 9 дням, а коэффициент напряженности – 0,667.

Наименее напряженными оказались пути выполнения работ, связанных с погрузкой, перевозкой и разгрузкой товара, а наиболее напряженными — с отбором товара и оформлением документации.

Определить степень трудности выполнения в срок каждой группы работ некритического пути можно с помощью коэффициента напряженности работ.

Коэффициентом напряженности  *КH*  работы *Pi,j*  называется отношение продолжительности несовпадающих (заключенных между одними и теми же событиями) отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим – критический путь:

,

где *t(Lmax)* – продолжительность максимального пути, проходящего через работу *Pi,j,* от начала до конца сетевого графика; *tkp* – продолжительность (длина) критического пути; *tlkp*– продолжительность отрезка рассматриваемого максимального пути, совпадающего с критическим путем.

Коэффициент напряженности работы характеризует напряженность сроков ее выполнения с помощью относительной, а не абсолютной величины ее полного резерва времени.

Коэффициент напряженности *КH* работы *Pi,j* может изменяться в пределах от 0 (для работ, у которых отрезки максимального из путей, не совпадающие с критическим путем, состоят из фиктивных работ нулевой продолжительности) до 1 (для работ критического пути). Чем ближе к 1 коэффициент напряженности *КH* работы *Pi,j*, тем сложнее выполнить данную работу в установленные сроки. Чем ближе *Кн* работы *Pi,j* к нулю, тем большим относительным резервом обладает максимальный путь, проходящий через данную работу.

Таблица 3.4.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Работа | Путь | Максима  льный путь, *t(Lmax)* | Совпадающие работы | *t(lkp)* | Расчет | *КH* |
| **(2,5)** | **(1,2)(2,5)(5,8)(8,9)(9,10) (10,11)** | **12** | **(1,2)(5,8)(8,9)(9,10) (10,11)** | **11** | **(12-11)/(13,5-11)** | **0.4** |
| **(2,8)** | **(1,2)(2,8)(8,9)(9,10) (10,11)** | **9** | **(1,2)(8,9)(9,10)(10,11)** | **8** | **(9-8)/(13,5-8)** | **0.18** |
| **(4,6)** | **(1,2)(2,3)(3,4)(4,6)(6,7) (7,8)(8,9)(9,10)(10,11)** | **11,5** | **(1,2)(2,3)(3,4)(8,9)(9,10)(10,11)** | **9,5** | **(11,5-9,5)/(13,5-9,5)** | **0.5** |
| **(6,7)** | **(1,2)(2,3)(3,4)(4,6)(6,7) (7,8)(8,9)(9,10)(10,11)** | **11,5** | **(1,2)(2,3)(3,4)(8,9)(9,10)(10,11)** | **9,5** | **(11,5-9,5)/(13,5-9,5)** | **0.5** |
| **(7,8)** | **(1,2)(2,3)(3,4)(4,6)(6,7)**  **(7,8)(8,9)(9,10)(10,11)** | **11,5** | **(1,2)(2,3)(3,4)(8,9)(9,10)(10,11)** | **9,5** | **(11,5-9,5)/(13,5-9,5)** | **0.5** |

Вычисленные коэффициенты напряженности работ позволяют дополнительно классифицировать работы по зонам. В зависимости от величины *Кн* выделяют три зоны: критическую (*Кн* > 0,8); подкритическую (0,6 < *Кн* < 0,8); резервную (*Кн* < 0,6). Работы *а2* - подготовка к отправке, *а3* - определение объёма отгрузки, *а8* - отправка счёта покупателю, *а9* - проверка товаров по счёту, *а10* - оплата счёта относятся к зоне резервных работ.

## Оптимизация сетевой модели по критерию «время-затраты»

Целью оптимизации по критерию "Время - затраты" является сокращение времени выполнения проекта в целом. Эта оптимизация имеет смысл только в том случае, когда время выполнения работ может быть уменьшено за счет задействования дополнительных ресурсов, что приводит к повышению затрат на выполнение работ (рисунок 3.4).



Рис.3.4. Зависимость прямых затрат на работу от времени ее выполнения

Для оценки величины дополнительных затрат, связанных с ускорением выполнения той или иной работы, используются либо нормативы, либо данные о выполнении аналогичных работ в прошлом. Под параметрами работ и понимаются так называемые прямые затраты, непосредственно связанные с выполнением конкретной работы. Таким образом, косвенные затраты типа административно-управленческих в процессе сокращения длительности проекта во внимание не принимаются, однако их влияние учитывается при выборе окончательного календарного плана проекта.

Важными параметрами работы при проведении данного вида оптимизации являются:

1. коэффициент нарастания затрат

,

который показывает затраты денежных средств, необходимые для сокращения длительности работы  на один день;

1. запас времени для сокращения длительности работы в текущий момент времени

,

где - длительность работы на текущий момент времени, – длительность ускоренной работы ;

* максимально возможное значение запаса времени работы равно

Эта ситуация имеет место, когда длительность работы еще ни разу не сокращали, т.е..

Проведём оптимизацию сетевой модели по критерию «Время – затраты» по следующей схеме.

1. Исходя из нормальных длительностей работ , определяются критические и подкритические пути сетевой модели и их длительности и .

2. Определяется сумма прямых затрат на выполнение всего проекта при нормальной продолжительности работ.

3. Рассматривается возможность сокращения продолжительности проекта, для чего анализируются параметры критических работ проекта.

1. Для сокращения выбирается критическая работа с min коэффициентом нарастания затрат , имеющая ненулевой запас времени сокращения .
2. Время , на которое необходимо сжать длительность работы , определяется как

,

где - разность между длительностью критического и подкритического путей в сетевой модели. Необходимость учета параметра вызвана нецелесообразностью сокращения критического пути более, чем на единиц времени. В этом случае критический путь перестанет быть таковым, а подкритический путь наоборот станет критическим, т.е. длительность проекта в целом принципиально не может быть сокращена больше, чем на .

4. В результате сжатия критической работы временные параметры сетевой модели изменяются, что может привести к появлению других критических и подкритических путей. Вследствие удорожания ускоренной работы стоимость проекта увеличивается на величину

5. Для измененной сетевой модели определяются новые критические и подкритические пути и их длительности, после чего необходимо продолжить оптимизацию с шага 3. При наличии ограничения в денежных средствах, их исчерпание является причиной окончания оптимизации (ограничение по средствам, выделенным на выполнение проекта -  руб.). Если не учитывать подобное ограничение, то оптимизацию можно продолжать до тех пор, пока у работ, которые могли бы быть выбраны для сокращения, не будет исчерпан запас времени сокращения.

Рассмотренная схема оптимизации предполагает наличие одного критического пути в сетевой модели. В случае существования нескольких критических путей необходимо либо сокращать общую для них всех работу, либо одновременно сокращать несколько различных работ, принадлежащих различным критическим путям. Возможна комбинация этих двух вариантов. В каждом случае критерием выбора работы или работ для сокращения должен служить минимум затрат на их общее сокращение. Проведем максимально возможное уменьшение сроков выполнения проекта при минимально возможных дополнительных затратах для следующих исходных данных (рисунок 3.5, таблица 3.5).

3

1

1

0,5

1

1

0,5

0,5

3

3

1

1

1

Рис.3.5. Исходная сетевая модель

Таблица 3.5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Нормальный режим | | | Ускоренный режим | |
|  |  | |  |  |
| (1,2) \* | 3 | 550 | | 2 | 600 |
| (2,8) | 1 | 225 | | 0,5 | 300 |
| (2,5) | 1 | 75 | | 0,5 | 100 |
| (2,3) \* | 0,5 | 37,5 | | 0,25 | 50 |
| (3,4) \* | 1 | 75 | | 0,5 | 100 |
| (4,5) \* | 1 | 75 | | 0,5 | 100 |
| (5,8) \* | 3 | 850 | | 2 | 900 |
| (4,6) | 1 | 100 | | 0,5 | 120 |
| (6,7) | 0,5 | 50 | | 0,25 | 60 |
| (7,8) | 0,5 | 50 | | 0,25 | 60 |
| (8,9) \* | 1 | 225 | | 0,5 | 300 |
| (9,10) \* | 3 | 500 | | 2 | 600 |
| (10,11) \* | 1 | 225 | | 0,5 | 300 |
| руб./день | | | руб. | | |

Исходя из нормальных длительностей работ, получаем следующие характеристики сетевой модели.

1. Общие затраты на проект  руб.
2. Длительность проекта  дней.
3. Критический путь (1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,8)(8,9)(9,10)(10,11).
4. Подкритический путь ,.

Кроме того, вычислим коэффициенты нарастания затрат и максимальные запасы времени сокращения работ сетевой модели (таблица 3.6).

Таблица 3.6

Коэффициенты нарастания затрат работ сети

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | [дни] | [руб./день] |
| (1,2)\* | 1 | 50 |
| (2,8) | 0,5 | 150 |
| (2,5) | 0,5 | 50 |
| (2,3)\* | 0,25 | 50 |
| (3,4)\* | 0,5 | 50 |
| (4,5)\* | 0,5 | 50 |
| (5,8)\* | 1 | 50 |
| (4,6) | 0,5 | 40 |
| (6,7) | 0,25 | 40 |
| (7,8) | 0,25 | 40 |
| (8,9)\* | 0,5 | 150 |
| (9,10)\* | 1 | 100 |

I шаг. Для сокращения выбираем критическую работу (1,2) с минимальным коэффициентом *k*(1,2) = 50 руб./день. Текущий запас сокращения времени работы (1,2) на данном шаге равен  день. Разность между продолжительностью критического и подкритического путей  дня. Поэтому, сокращаем работу (1,2) на . Новая текущая длительность работы  дня, а запас ее дальнейшего сокращения уменьшается до . Измененный сетевой график представлен на рисунке 3.6.

Рис.3.6. Сетевая модель после первого шага оптимизации

1

1

0,5

1

1

0,5

0,5

3

3

1

1

1

2

После ускорения работы (1,2) возникли следующие изменения.

1. Затраты на работу (1,2) возросли на 50 руб. и прямые затраты на проект составили  руб.
2. Длительность проекта  дней.
3. Критические пути
4. Подкритический путь ,  дней.

II шаг. Следующим наиболее дешевым вариантом является ускорение критической работы (2,3) с минимальным коэффициентом *k*(2,3) = 50 руб./день. Текущий запас сокращения времени работы (2,3) на данном шаге равен  дня. Разность между продолжительностью критического и подкритического путей  дня. Поэтому, сокращаем работу (2,3) на [1,5;0,25]=0,25 дня. Новая текущая длительность работы  дня, а запас ее дальнейшего сокращения уменьшается до . Измененный сетевой график представлен на рисунке 3.7.

1

1

1

1

0,5

0,5

3

3

1

1

1

2

0,25

Рис.3.7. Сетевая модель после второго шага оптимизации

После ускорения работы  возникли следующие изменения.

1. Прямые затраты на проект составили  руб.
2. Длительность проекта дней.
3. Критические пути
4. Подкритический путь ,  дней.

Пошаговую оптимизацию проводим до тех пор, пока все работы критического пути не исчерпают свой запас времени ускорения.

После последнего шага оптимизации получаем следующую сетевую модель (рисунок 3.8).

1

1

0,5

0,5

1

2

0,25

0,5

0,5

2

2

0,5

0,5

1

Рис.3.8. Сетевая модель после последнего шага оптимизации

Проект не может быть выполнен меньше, чем за дней.

Таблица 3.7.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| шаг |  |  |  |  |
| 1 | 12,5 | 3087,5 | 1875 | 4962,5 |
| 2 | 12,25 | 3100 | 1837,5 | 4937,5 |
| 3 | 11,75 | 3125 | 1762,5 | 4887,5 |
| 4 | 11,25 | 3150 | 1687,5 | 4837,5 |
| 5 | 11 | 3162,5 | 1650 | 4812,5 |
| 6 | 10,75 | 3175 | 1612,5 | 4787,5 |
| 7 | 10,5 | 3187,5 | 1575 | 4762,5 |
| 8 | 10,25 | 3200 | 1537,5 | 4737,5 |
| 9 | 10 | 3225 | 1500 | 4725 |
| 10 | 9,75 | 3250 | 1462,5 | 4712,5 |
| 11 | 9,5 | 3275 | 1425 | 4700 |
| 12 | 9,25 | 3300 | 1387,5 | 4687,5 |
| 13 | 9 | 3337,5 | 1350 | 4687,5 |
| 14 | 8,75 | 3375 | 1312,5 | 4687,5 |
| 15 | 8,5 | 3412,5 | 1275 | 4687,5 |
| 16 | 8,25 | 3450 | 1237,5 | 4687,5 |

Таким образом, при отсутствии ограничений на затраты минимально возможная длительность проекта составляет 8,25 дней. Сокращение длительности проекта с 13,5 дней до 8,25 дней потребовало 362,5 рублей прямых затрат. В отличие от прямых затрат при уменьшении продолжительности проекта косвенные затраты ( руб./день) убывают, что показано на графике (рисунок 3.9). Минимум общих затрат ( руб.) соответствует продолжительности проекта с 8,25 дней (точка А) до 9,25 дней (точка В).

Если же учитывать ограничение по средствам, выделенным на выполнение проекта,  рубля, то оптимальным является выполнение проекта за 9,5 дней (точка D).

Рис.3.9. График "Время - затраты"

## Расчёт вероятностных характеристик сетевой модели

Продолжительность выполнения работы задаётся двумя оценками – минимальная и максимальная. Минимальная оценка *tmin(i,j)* характеризует продолжительность выполнения работы при наиболее благоприятных обстоятельствах, а максимальная *tmax(i,j)* – при наиболее неблагоприятных.

Продолжительность работы в этом случае рассматривается, как случайная величина, которая в результате реализации может принять любое значение в заданном интервале. Такие оценки называются вероятностными (случайными), и их ожидаемое значение *tож(i,j)* оценивается по формуле:

Для характеристики степени разброса возможных значений вокруг ожидаемого уровня используется показатель дисперсии:

Рассчитаем ожидаемое значение и показатель дисперсии.  
Полученные данные занесем в таблицу 3.8.

Таблица 3.8.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *(i,j)* | *tmax(i,j)*  *Tн* | *tmin(i,j)*  *Ту* | *tож(i,j)* | *S2* |
| 1,2\* | 3 | 2 | 2,4 | 0,04 |
| 2,8 | 1 | 0,5 | 0,7 | 0,01 |
| 2,5 | 1 | 0,5 | 0,7 | 0,01 |
| 2,3\* | 0,5 | 0,25 | 0,35 | 0,00 |
| 3,4\* | 1 | 0,5 | 0,7 | 0,01 |
| 4,5\* | 1 | 0,5 | 0,7 | 0,01 |
| 5,8\* | 3 | 2 | 2,4 | 0,04 |
| 4,6 | 1 | 0,5 | 0,7 | 0,01 |
| 6,7 | 0,5 | 0,25 | 0,35 | 0,00 |
| 7,8 | 0,5 | 0,25 | 0,35 | 0,00 |
| 8,9\* | 1 | 0,5 | 0,7 | 0,01 |
| 9,10\* | 3 | 2 | 2,4 | 0,04 |
| 10,11\* | 1 | 0,5 | 0,7 | 0,01 |

Критический путь проходит по работам:

*(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,8)(8,9)(9,10)(10,11).*

Его ожидаемая продолжительность равна *tкр=13,5* дней. Дисперсия критического пути:

S2 (Lкр)=S2(1,2) + S2(2,3) + S2(3,4) + S2(4,5) + S2(5,8) + S2(8,9) + S2(9,10) + S2(10,11)  
S2(Lкр)=0.04 + 0.00 + 0.01 + 0.01 + 0.04 + 0.01 + 0.04 + 0.01 = 0.16  
 Среднее квадратическое отклонение: S(Lкр) = 0.4.

Найдём вероятность того, что весь комплекс работ до оптимизации будет выполнен не более чем за 14 дней (директивный срок).

*Р(tкр<14)=0,5+0,5Ф{(14-13,5)/0,4}=0.5+0.5Ф(1,2)=0,894.*

Таким образом, вероятность того, что весь комплекс работ до оптимизации будет выполнен не более чем за 14 дней, составляет 89,4%,

Найдём вероятность того, что весь комплекс работ после оптимизации будет выполнен не более чем за 14 дней.

*Р(tкр<14)=0,5+0,5Ф{(14-8,25)/0,4}=1*

Таким образом, вероятность того, что весь комплекс работ до оптимизации будет выполнен не более чем за 14 дней, составляет 100%. Очевидно, с достаточной степенью надежности можно прогнозировать выполнение проекта в установленный срок, т.е. с высокой степенью уверенности предполагать своевременность выполнения всего комплекса работ.

Для решения второй задачи, необходимо найти значение аргумента функции Лапласа, которое соответствует заданной вероятности 95% (таблица 3.9).

Значения функции Лапласа определяются с помощью значений таблицы функций Лапласа или с помощью функции «НОРМ.РАСП» в среде MS Excel.

Таблица 3.9

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *tкp* | *P(tкp ≤ Т)* | *Т* |
| До оптимизации | 95% | 14,16 |
| После оптимизации | 95% | 8,91 |

Следовательно, максимально возможный срок выполнения всего комплекса работ до оптимизации при заданной вероятности *р=95%* составляет 14,16 дней, после оптимизации составляет 8,91 день.

## Вывод по главе

Представленная во второй главе квалификационной работы методика оптимизации сетевых моделей по критерию «время-затраты» была реализована **в данной главе при решения оптимизационной задачи** планирования поставок куриной продукции оптовым покупателям торговой фирмы г. Бендеры. Задача состояла в том, чтобы графически, наглядно и системно отобразить, и оптимизировать последовательность указанных работ с целью максимально возможного сокращения времени поставок товаров оптовым покупателям.

Первоначально разработанная сетевая модель оказалась не лучшей по срокам выполнения работ и использования ресурсов. Поэтому исходная сетевая модель подверглась анализу и оптимизации по критерию «время-затраты». Анализ позволил оценить целесообразность структуры модели и определить степень сложности выполнения каждой работы.

Оптимизация полученной сетевой модели позволила провести максимально возможное сокращение времени выполнения проекта, при этом резервы переносились с некритических работ на критические. Вариантов планирования указанных работ получилось достаточно много, но лишь один из них оказался оптимальным по критерию «время-затраты». Уменьшение длительности комплекса работ с 13,5 дней до 8,25 дней обеспечило сокращение сроков окупаемости поставок и более раннему выводу товара на рынок, что способствует конкурентному успеху фирмы.

Рассмотренная в данной квалификационной работе оптимизационная задача показала, что экономическая эффективность от внедрения СПУ в планирование предпринимательской деятельности определяется возможностями уменьшения общего цикла работ и сокращением затрат за счет более рационального использования трудовых, материальных и денежных ресурсов.

Заключение

В ходе выполнения квалификационной работы были рассмотрены теоретические аспекты сетевого планирования и управления, связанные с построением сетевых моделей и с методами их оптимизации.

Сетевое планирование как часть системы управления проектами стало объектом внимания и внедрения в связи с обострением конкуренции и падением прибыли. Основным плановым документом в системе СПУ является сетевой график (или сетевая модель), представляющий собой информационно-динамическую модель, в которой отражаются взаимосвязи и результаты всех работ, необходимых для достижения конечной цели проекта.

Сетевые модели служат не только для планирования разнообразных долгосрочных работ, но и их координации между руководителями и исполнителями проектов, а также для определения необходимых производственных ресурсов и их рационального использования.

Методы сетевого планирования и управления основаны на моделировании процессов с помощью сетевого графика и представляют собой совокупность расчётных, организационных и контрольных мероприятий по эффективному планированию и управлению комплексом работ.

Сетевое планирование может успешно применяться в различных сферах производственной и предпринимательской деятельности.

Представленная в работе методика **оптимизации сетевых моделей продемонстрирована на примере решения оптимизационной задачи** планирования поставок товаров оптовым покупателям. Задача состояла в том, чтобы графически, наглядно и системно отобразить и оптимизировать последовательность указанных работ.

Первоначально разработанная сетевая модель оказалась не лучшей по срокам выполнения работ и использования ресурсов. Поэтому исходная сетевая модель подверглась анализу и оптимизации по критерию «время-затраты». Анализ позволил оценить целесообразность структуры модели и определить степень сложности выполнения каждой работы.

Оптимизация полученной сетевой модели позволила провести максимально возможное сокращение времени выполнения проекта, при этом резервы переносились с некритических работ на критические. Вариантов планирования указанных работ получилось достаточно много, но лишь один из них оказался оптимальным по критерию «время-затраты». Уменьшение длительности комплекса работ с 13,5 дней до 8,25 дней обеспечило сокращение сроков окупаемости поставок и более раннему выводу товара на рынок, что способствует конкурентному успеху фирмы.

Рассмотренная в данной квалификационной работе оптимизационная задача планирования поставок товаров оптовым покупателям показала, что экономическая эффективность от внедрения СПУ в планирование предпринимательской деятельности определяется возможностями уменьшения общего цикла работ и сокращением затрат за счет более рационального использования трудовых, материальных и денежных ресурсов.

Преимущества моделей сетевого планирования и управления обеспечивают своевременное внесение корректив в процесс управления и в работу различных управленческих органов, эффективное предвидение будущего и надлежащего воздействия на ход выполнения работ.

В настоящее время происходит расширение методов и приемов использования сетевых моделей и методов их оптимизации. Диапазон применения сетевого планирования и управления весьма широк: от задач, касающихся деятельности отдельных лиц, до проектов, в которых участвуют сотни организаций и десятки тысяч людей [18].

Методы сетевого планирования и управления обеспечивают руководителей и исполнителей на всех участках работы обоснованной информацией, которая необходима им для принятия решений по планированию, организации и управлению. А при использовании вычислительной техники сетевое планирование и управление является уже не просто одним из методов планирования, а автоматизированным методом управления процессами в сферах производственной и предпринимательской деятельности.

Литература

1. Адигамов А.Э, Макаров П.В., Семенова Н.В. Теория графов и оптимизация на сетях, учебное пособие. – М.: Тип. МГГУ, 2009.­ – 64с.
2. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу «Экономи-ко-математические методы и модели». – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. – 153 с.
3. Балашевич В.А. Математические методы в управлении производством. –Минск: В.Ш., 1976.– 336 с.
4. Басакер Р, Саати Т. Конечные графы и сети. – М.: Наука, 1974. – 366 с.
5. Белов В.В., Воробьев Е.И., Шаталов В.Е. Теория графов. – М.: Высшая школа, 1976. – 392с.
6. Бухалков М.И. Внутрифирменное планирование: Учебник. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА – М, 2003. – 400 с.
7. Вагнер Г. Основы исследования операций. Т.1.– М.: Мир, 1972. – 336 с.
8. Веников В.А., Веников Г.В. Теория подобия и моделирования. – М.: Высш. шк., 1984. – 480 с.
9. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Дрофа, 2004. – 208с.
10. Волков, И. К. Исследование операций: учеб. для вузов / И. К. Вол-ков, Е. А. Загоруйко; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 440 с.
11. Гамецкий А.Ф., Слободенюк В.А., Спиридонова Г.В. Модели и методы исследования операций.– Кишинев: Отдел печати КГУ, 1985.– 89 с.
12. Гамецкий А.Ф., Слободенюк В.А., Спиридонова Г.В. Теория игр, исследование операций. – Кишинев: Отдел печати КГУ, 1987. – 84 с.
13. Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. Исследование операций. Том 2. – Chişinǎu: Evrica, 2007. – 456c.
14. Дегтярев В.Г., Демьянович Ю. К. Дискретная математика: Учебное пособие. – СПб: Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2004.– 100 с.
15. Жданов, С. А. Экономические модели и методы в управлении / С. А. Жданов. – М.: Изд-во «Дело и Сервис», 1998. – 176 с.
16. Зубов Н.Н., Титов В.А. Моделирование и оптимизация технологических процессов: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во СПбГУСЭ, 2009.**–** 183 с.
17. Зуховицкий С.И., Радчик И.А. Математические методы сетевого планирования. – М.: Наука, 1965.– 296 с.
18. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ, 2003. – 407 с.
19. Кобелев Н.Б. Основы имитационного моделирования сложных экономических систем: учеб. пособие. – М.: Дело, 2003. – 336 с.
20. Конюховский, П. В. Математические методы исследования операций в эко-номике : учеб. пособие / П. В. Конюховский. – СПб.: Питер, 2000. – 208 с.
21. Лотов, А. В. Введение в экономико-математическое моделирование. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 392 с.
22. Модер Дж., Филлипс С. Метод сетевого планирования в организации работ, пер. с англ.– М.: Л., 1966.– 304с.
23. Оре О. Графы и их применение.– М.: Наука, 1980. – 336с.
24. Пижурин А.А. Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки: учеб. для вузов. – М.: Лесн. пром-сть, 1988. – 296 с.
25. Стариков, А. В. Экономико-математическое и компьютер моделирование: Учеб. пособие.– Воронеж: ГОУ ВПО«ВГЛТА», 2008. – 132 с.
26. Стивенсон, В. Дж. Управление производством: [пер. с англ.] / В. Дж. Стивенсон. – М.: ООО «Изд-во «Лаборатория Базовых Знаний», ЗАО «Изд-во БИНОМ», 1999. – 928 с.
27. Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 368 с.
28. Советов Б. Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1999. – 320 с.
29. Управление проектами/ Под ред. В. Д. Шапиро. – СПб.: Два-три, 1996. – 610с.
30. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (индустриальная дина-мика): [пер. с англ.]/ Дж. Форрестер. – М.: Прогресс, 1971. – 340 с.
31. Хазанова Л. Э. Математические методы в экономике: Учеб. пособие/ 2-е изд., испр. и перераб. – М.: Изд-во БЕК, 2002. – 144 с.
32. Хемди А. Таха Введение в исследование операций, 7 изд. – М.: 2005.– 903с.
33. Шикин Е. В., Чхартишвили Г.А, Математические методы и модели в управлении: учеб. пособие / Е. В. Шикин, Г. А. Чхартишвили. – М.: Дело, 2002. – 440 с.
34. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие / Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.Н. Жихар и др.; Под общ. ред. А.В. Кузнецова.2-е изд. – Мн.: БГЭУ, 2000. – 412 с.
35. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.
36. <http://www.allbest.ru/>
37. <http://ru.wikipedia.org>